問題

関数 $f(x)=|\sin 2x|+2\sin x\ (0\leqq x\leqq \pi)$ について次の問いに答えよ

(1) 曲線 $C: y=f(x)$ が直線 $x=\dfrac{\pi}{2}$ に関して対称であること、
すなわち任意の $x\left(0\leqq x\leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ に対して $f\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)=f\left(\dfrac{\pi}{2}+x\right)$ が成立すること
を示せ。

(2) $f(x)$ の最大値、最小値を求めよ

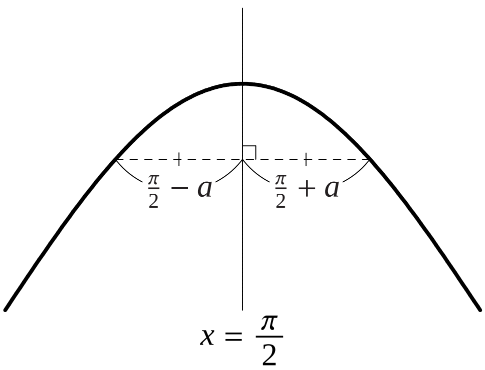
(3) 曲線 C の概形をかけ

(4) x 軸と曲線 C で囲まれた図形を x 軸のまわりで１回転してできる回転体の体積を求めよ。

【解説】
２００４年の北見工業大学の過去問です。問題の難易度としては標準的な問題です。このくらいの問題をサクサクできるようになって欲しいです。それでは、問題に進みます。

（＊）(１)
【解説】
対称性に関する問題ですが、これは本当によく出題されます。今回の問題には、親切にも $f\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)=f\left(\dfrac{\pi}{2}+x\right)$ であることを示しなさい、と問題文に書かれていますが、通常こんなことは書かれないことが多いです。$x=\dfrac{\pi}{2}$ について対称であるときは、$f\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)=f\left(\dfrac{\pi}{2}+x\right)$ を示したらいいんだな、と気づけるようになっておいてください。

対称性の証明が、なぜ $f\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)=f\left(\dfrac{\pi}{2}+x\right)$ でよいか、難しく感じる人もいるたまにいるけど、次の図を見たらあきらかだと思いますよ。



$x=\dfrac{\pi}{2}$ で対称となるのは上図のようなときです。知っていると思うけど、$x=\dfrac{\pi}{2}$ につい

て対称とは、グラフを $x=\frac{\pi}{2}$ について折り返しても、重なってくれるということです。

ですから、$x=\frac{\pi}{2}$ から同じ距離だけ進んだ地点での y 座標は当然等しくなります。

$x=\frac{\pi}{2}$ から左側に a だけ進んだときの x 座標は $\frac{\pi}{2}-a$ で、右側に a だけ進んだときの x 座標は $\frac{\pi}{2}+a$ です。

このとき 2 つの y 座標が等しくなるので $f\left(\frac{\pi}{2}-a\right)=f\left(\frac{\pi}{2}+a\right)$ が成立します。

(＊同じ x では、分かりにくくなるので今回は a で証明しました。$f\left(\frac{\pi}{2}-a\right)=f\left(\frac{\pi}{2}+a\right)$ の a を x に置き換えたら、問題文の式と同じになります。)

今回の問題は絶対値などを含んでいて、対称ということにすぐに気づくのは難しいですけど、こういった三角関数の問題は対称性を使うということが本当に多いです。この問題では、（1）で誘導問題として載せてくれていますが、こういった誘導がないときもあります。

ですから、三角関数の問題が出てきたら対称性は考えられないかな？と考えるようにしておいてください。$\sin x$ が $x=\frac{\pi}{2}$ について対称というのが一番よく出題されます。それでは、解答に進みます。証明すべき式が問題に乗っているので、ただ単にそれを解くだけです。

【解答】

$$f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\left|\sin 2\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right|+2\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$$

$$=|\sin(\pi-2x)|+2\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$$

$$=|\sin 2x|+2\cos x$$ ◀ 以下の（注）を見よ

ここで、$0\leqq x\leqq\frac{\pi}{2}$ つまり $0\leqq 2x\leqq\pi$ より $\sin 2x\geqq 0$ より

$$=\sin 2x+2\cos x$$ ◀ 絶対値の中身が正のより $|\sin 2x|=\sin 2x$

（注）$\sin(\pi-2x)=\sin 2x,\ \sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos x$ について

これらは暗記をしている人もいると思うけど、いろいろとあるのでわざわざ暗記する必要はないですよ。加法定理を使えば簡単に導くことができます。今回は少し割愛します。もし分からなければ、http://www.hmg-gen.com/sankaku90.pdf で勉強して下さい。

$$f\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\left|\sin 2\left(\frac{\pi}{2}+x\right)\right|+2\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)$$

$$=|\sin(\pi+2x)|+2\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)$$

$$=|-\sin 2x|+2\cos x$$

$=|\sin 2x|+2\cos x$ ◀ $|AB|=|A||B|$ より $|-\sin 2x|=|-1|\cdot|\sin 2x|=|\sin 2x|$

ここで、$0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}$ つまり $0\leqq 2x\leqq\pi$ より $\sin 2x\geqq 0$ より

$=\sin 2x+2\cos x$ ◀ 絶対値の中身が正のより $|\sin 2x|=\sin 2x$

以上より、$f\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)=f\left(\dfrac{\pi}{2}+x\right)$ が成立する。//

（＊）(2), (3)

【解説】

(2) と (3) は、グラフをかいて考えるだけです。当然 (1) で求めたグラフの対称性を使っていきます。

【解答】

(1) より、$f(x)$ は $x=\dfrac{\pi}{2}$ について対称なので、$0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}$ について考える。

$f(x)=|\sin 2x|+2\sin x$

ここで $0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}$ のとき、$\sin 2x\geqq 0$ より

$=\sin 2x+2\sin x$

$f'(x)=2\cos 2x+2\cos x$

$=2(2\cos^2 x-1)+2\cos x$

$=2(2\cos^2 x+\cos x-1)$

$=2(\cos x+1)(2\cos x-1)$

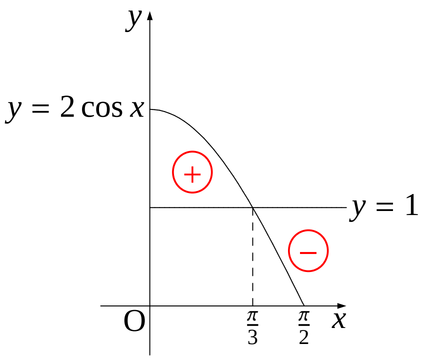
ここで、$\cos x+1\geqq 0$ より $f'(x)$ の正負は $2\cos x-1$ の正負と一致する。

⇑ $f'(x)$ で知りたいのは正負のみ。正負に影響しないものは外して考える。

また正負の判断は、グラフをかいて考えるという手法をしっかりと理解しておいてください。今回のように簡単な問題なら頭の中で考えることもできますが、複雑になるとグラフで考えるという手法を理解しておかないと少し難しくなります。

どのように考えるかというと今回は $2\cos x-1$ です。$y=2\cos x$ と $y=1$ のグラフのふたつを同じところにかき、$y=2\cos x$ の方が $y=1$ より上側にあるとき $2\cos x>1$ となり、$y=2\cos x$ の方が $y=1$ より下側にあるとき $2\cos x<1$ となります。

このように $f'(x)=g(x)-h(x)$ の形にして $y=g(x)$ と $y=h(x)$ のグラフの上下関係で考えるというのが鉄則です。しっかりと理解しておいてください。



グラフより、$0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{3}$ では $y=2\cos x$ の方が $y=1$ よりも上側にあるので、$2\cos x-1\geqq 0$。

反対に、$\dfrac{\pi}{3}\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}$ では $y=2\cos x$ の方が $y=1$ よりも下側にあるので、$2\cos x-1\leqq 0$。

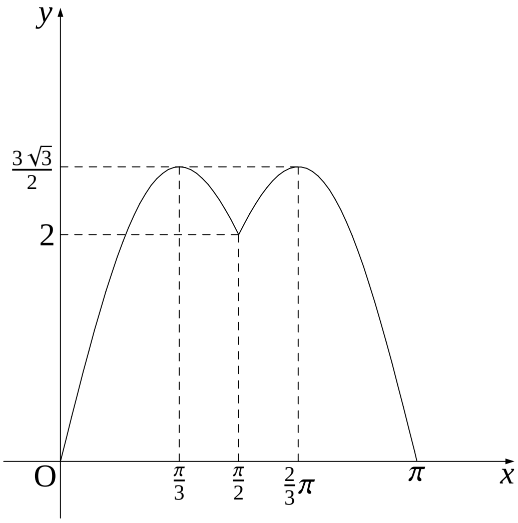
このようにかくと視覚的に正負が判断できるので、ラク

よって、増減表をかくと

x	0		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	↗	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$	↘	2

増減表とまた $f(x)$ は $x=\dfrac{\pi}{2}$ について対称なことを考えると、最大値は $\dfrac{3}{2}\sqrt{3}$ で最小値は 0 となる。

また、グラフは次のようになる。



（＊）(4)

【解説】

これは単なる定積分を計算するだけの問題です。

途中 $\int \sin 2x \sin x\, dx$ を計算しないといけません。積和の公式を使ってもらってもいいですが、$\sin 2x = 2\sin x \cos x$ と 2 倍角の公式より $2\int \sin x \cos^2 x\, dx$ となりますが、これは $\int f'(x)\{f(x)\}^n\, dx$ の形をしているので特殊基本関数を使えます。それでは、解答に進みます。

【解答】

グラフの対称性を考え、求める体積 V は $V = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \pi(\sin 2x + 2\cos x)^2\, dx$ となる。

$$
\begin{aligned}
V &= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \pi(\sin 2x + 2\cos x)^2\, dx \\
&= 2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2 2x + 4\sin 2x\cos x + 4\cos^2 x)\, dx \\
&= 2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2x\, dx + 8\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x\cos x\, dx + 8\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\, dx
\end{aligned}
$$

ここで

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2x\,dx$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos 4x}{2}\,dx$$
$$=\left[\frac{x}{2}+\frac{\sin 4x}{8}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$
$$=\frac{\pi}{4}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x \cos x\,dx$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\sin x\cos^2 x\,dx$$
$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}} -(\cos x)'\cos^2 x\,dx$$
$$=2\left[-\frac{1}{3}\cos^3 x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$
$$=\frac{2}{3}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\,dx$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2x}{2}\,dx$$
$$=\left[\frac{x}{2}+\frac{\sin 2x}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$
$$=\frac{\pi}{4}$$

よって、

$$V = 2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2x\,dx + 8\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x\cos x\,dx + 8\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\,dx$$
$$= 2\pi\cdot\frac{\pi}{4} + 8\pi\cdot\frac{2}{3} + 8\pi\cdot\frac{\pi}{4}$$
$$= \frac{\pi^2}{2} + \frac{16}{3}\pi + 2\pi^2$$
$$= \pi\left(\frac{5}{2}\pi + \frac{16}{3}\right)$$

今回の問題はどうだったでしょうか？決して難しい問題ではないですけど、それほど簡単という訳でもないと思います。このくらいの問題をスラスラと解けるようになるまで演習を繰り返しておいてください。

河見賢司

高校数学の勉強法
http://www.hmg-gen.com/

感想はこちらまでメールをください（何か言ってもらえると嬉しいです）
magdai@hmg-gen.com