問題

正の実数 a に対し、$x = a + \dfrac{1}{a},\ y = a - \dfrac{1}{a}$ とおく、このとき $x^8 - y^8$ が最小となる a の値と、その最小値を求めよ

２００４年の北海道大学の文系学部の過去問です。対称式に関する問題です。

次数が高くて少し計算がやっかいですが、とにかく普通どおりに計算をしていけば解くことができます。制限時間は１０分くらいで十分だと思います。

対称式をあまり知らないという人は、以下のプリントを見てください。
対称式の解説プリント http://www.hmg-gen.com/taisyousiki.pdf
対称式の練習問題の解答 http://www.hmg-gen.com/k-taisyousiki.pdf

【解説】
$x^8 - y^8$ を見て、よく分かんないけど、このままでは次数が高すぎるのでとりあえず因数分解をしていくことにします。

$$
\begin{aligned}
& x^8 - y^8 \\
=& (x^4 + y^4)(x^4 - y^4) \\
=& (x^4 + y^4)(x^2 + y^2)(x^2 - y^2) \\
=& (x^4 + y^4)(x^2 + y^2)(x + y)(x - y)
\end{aligned}
$$

とりあえず、ここまで因数分解できました。もうこれ以上できないので、
ここから $x = a + \dfrac{1}{a},\ y = a - \dfrac{1}{a}$ を代入して解いていきます。

$$x - y = a + \frac{1}{a} - \left(a - \frac{1}{a}\right) = \frac{2}{a}$$

$$x + y = a + \frac{1}{a} + \left(a - \frac{1}{a}\right) = 2a$$

$$xy = \left(a + \frac{1}{a}\right)\left(a - \frac{1}{a}\right) = a^2 - \frac{1}{a^2}$$

⇑ 対称式の問題では、基本対称式 $x + y$ と xy の値が必要になるので、xy の値を求めた！

$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$ ◀ 有名な対称式の式変形。この式は暗記

$$=(2a)^2-2\left(a^2-\frac{1}{a^2}\right)$$
$$=4a^2-2a^2+\frac{2}{a^2}$$
$$=2a^2+\frac{2}{a^2}$$
$$=2\left(a^2+\frac{1}{a^2}\right)$$

$x^4+y^4=(x^2)^2+(y^2)^2$ ◀ x^2 と y^2 の対称式とみなす

$=(x^2+y^2)^2-2x^2y^2$ ◀ 覚えるべき対称式より

$=\left(2a^2+\frac{2}{a^2}\right)^2-2\left(a^2-\frac{1}{a^2}\right)^2$ ◀ $x^2+y^2=2a^2+\frac{2}{a^2}$, $xy=a^2-\frac{1}{a^2}$ をそれぞれ代入した

$$=4a^4+8+\frac{4}{a^4}-2\left(a^4-2+\frac{1}{a^4}\right)$$
$$=2a^4+12+\frac{2}{a^4}$$
$$=2\left(a^4+6+\frac{1}{a^4}\right)$$

こられの式より、

x^8-y^8

$=(x^4+y^4)(x^2+y^2)(x+y)(x-y)$

$=2\left(a^4+6+\frac{1}{a^4}\right)2\left(a^2+\frac{1}{a^2}\right)2a\,\frac{2}{a}$

$=16\left(a^4+\frac{1}{a^4}+6\right)\left(a^2+\frac{1}{a^2}\right)$

すこし面倒でしたけど、何も考えずにただ単に式変形をしたらここまできました。

で、「ここからどうするんだろう…」と考えるんだけど、どうしようかな？まず、最大値、最小値問題はグラフをかいて考えるのが基本だったんだけど、$8\left(a^4+\frac{1}{a^4}+6\right)\left(a^2+\frac{1}{a^2}\right)$ のグラフなんて面倒そうだよね数学 III を勉強した人しか分数関数のグラフはかけない。だから、文系の試験で分数関数の最大値、最小値問題がきたらグラフをかく以外の解き方があるんだなと思えるようにしておいてください。

で、どうしようかな？と思うんだけど、与式をよく見てみるとこれって $a^2+\frac{1}{a^2}$ のみの式になってくれるんじゃない？

だって、$\left(a^2+\dfrac{1}{a^2}\right)^2=a^4+2+\dfrac{1}{a^4}$ となるから、$a^4+\dfrac{1}{a^4}$ も $a^2+\dfrac{1}{a^2}$ で表すことができるよね。

ここからは、与式を $a^2+\dfrac{1}{a^2}$ のみの式にして、$t=a^2+\dfrac{1}{a^2}$ とでも文字を置き換えて解いていくだけです。

当たり前だとは思うけど、文字を置き換えたときは範囲に注意しないといけません。
$a^2+\dfrac{1}{a^2}$ の値の範囲は相加相乗平均より 2 以上となります。

相加相乗平均について知らないという人は、http://www.hmg-gen.com/situmon/tsuugaku2B/2B-3.html を見てください。

それでは、解答に進みます。

【解答】

$$
\begin{aligned}
&x^8-y^8\\
=&(x^4+y^4)(x^2+y^2)(x+y)(x-y)\\
=&2\left(a^4+6+\frac{1}{a^4}\right)2\left(a^2+\frac{1}{a^2}\right)2a\,\frac{2}{a}\\
=&16\left(a^4+\frac{1}{a^4}+6\right)\left(a^2+\frac{1}{a^2}\right)
\end{aligned}
$$

ここで、$a^2+\dfrac{1}{a^2}=t$ とする。

$a^2>0$ より、相加相乗平均より $t=a^2+\dfrac{1}{a^2}\geqq 2$　等号は $a^2=\dfrac{1}{a^2}$ つまり $a=1$ のときに成立

$$
\begin{aligned}
&a^2+\frac{1}{a^2}=t\\
&\left(a^2+\frac{1}{a^2}\right)^2=t^2\\
&a^4+2+\frac{1}{a^4}=t^2\\
&a^4+\frac{1}{a^4}+6=t^2+4
\end{aligned}
$$

よって、

$$x^8+y^8=16(t^2+4)t$$
$$=16t^3+64t$$

$f(t)=16t^3+64t$ とする。

$$f(t)=16t^3+64t$$
$$f'(t)=48t^2+64$$

よって $f'(t)$ は常に正。$f(t)$ は単調増加なので、$t \geqq 2$ の範囲では $t=2$ のときに、$f(t)$ は最小となる。

$$f(2)=16\cdot 2^3+64\cdot 2=256$$

以上より、x^8+y^8 は $a=1$ のとき最小値 256 をとる。

今回の問題はどうだったでしょうか？私の答案よりももっと簡単に解ける手法があるかもしれません。ただ、そんな解き方を考えるよりも使いなれて対称式の知識を使って解いた方がはやいと思いこの解法で解きました。

試験会場でも、あれこれ考えるよりもこのくらいの計算量なら少々強引に押し切ることもあります。そうなったら計算力の勝負になります。普段から、計算力を鍛えるようにしておいてください。

河見賢司

高校数学の勉強法
http://www.hmg-gen.com/

感想はこちらまでメールをください（何か言ってもらえると嬉しいです）
magdai@hmg-gen.com