問題

a, b, c をそれぞれ正の数とする。このとき $a\overrightarrow{\mathrm{PA}} + b\overrightarrow{\mathrm{PB}} + c\overrightarrow{\mathrm{PC}} = \overrightarrow{0}$ を満たす点 P は、三角形 ABC の内部にある。

このとき、$\triangle\mathrm{PBC}, \triangle\mathrm{PCA}, \triangle\mathrm{PAB}$ の面積比を求めよ

ベクトルの問題で、三角形の面積比に関する問題です。三角形の面積比は、センター試験や私立大学の小問などでたまに出題されます。

いちいちまじめに？求めている人が多いですが、今回話す内容を公式をして覚えてもらえば一瞬で面積比をだすことができます。知っていると得です。ぜひとも暗記しておいてください。

【解説】
$a\overrightarrow{\mathrm{PA}} + b\overrightarrow{\mathrm{PB}} + c\overrightarrow{\mathrm{PC}} = \overrightarrow{0}$ を見て、まず次のことを思い出さないといけません。

ベクトルでは、始点がそろっていないと考えにくい。ベクトルの始点がそろっていないときは、まず始点をそろえてから問題を解いていく

上記のことを頭にいれてこの問題を見てみると、今回は始点が P でそろっているのでこのままでいいかな？と思うけど、次のことも覚えておいてください。

ベクトルでは、始点を任意点 O にすると考えやすくなることが多い

ここで任意点の意味が分からないという人もいると思うので、簡単に説明をしておきます。任意点 O というのは、「O がどこにあってもいいですよ」という意味です。

このことを、重心の公式を例にとって解説をしていきたいと思います。重心の公式は覚えておかないといけないけど、次のようになります。

重心

三角形 ABC の重心を G とする。O を任意点として

$\overrightarrow{\mathrm{OG}} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}} + \overrightarrow{\mathrm{OC}}\right)$ となる。

$\overrightarrow{\mathrm{AG}}$ を計算で求めたいと思います。M を BC の中点とすると $\overrightarrow{\mathrm{AM}} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{AC}}\right)$ で表さ

れ、重心の性質 (重心は AM を 2 : 1 に内分する点) より $\overrightarrow{\mathrm{AG}} = \frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{AM}}$ が成り立ちます。

これより $\overrightarrow{\mathrm{AG}} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{AC}}\right)$ で表されます。

次に任意点という考えから公式から求めてみます。重心の公式は、O を任意点として $\overrightarrow{\mathrm{OG}} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}} + \overrightarrow{\mathrm{OC}}\right)$ で表されるんだったよね。O は任意点なので、別に O を A に置き換えても、式は成り立つはずです。

$\overrightarrow{\mathrm{OG}} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}} + \overrightarrow{\mathrm{OC}}\right)$ の O を A に置き換えると、

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathrm{AG}} &= \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{\mathrm{AA}} + \overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{AC}}\right) && \blacktriangleleft\ O \text{ を } A \text{ に置き換えた！} \\ &= \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{AC}}\right) && \blacktriangleleft\ \overrightarrow{\mathrm{AA}} = \vec{0} \text{ より} \end{aligned}$$

これで、計算で求めた $\overrightarrow{\mathrm{AG}} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{AC}}\right)$ を同じ結果になってくれました。

このように任意点だと、O はどのように置き換えてもいいので考えやすくなることが多いです。**ベクトルの問題でよく分からない時は、始点を任意点 O にして考えていくといい**です。

長々と話がそれてしまいましたが、問題に戻りたいと思います。とりあえず、始点を O に変更をして考えていきます。

$$a\overrightarrow{\mathrm{PA}} + b\overrightarrow{\mathrm{PB}} + c\overrightarrow{\mathrm{PC}} = \vec{0}$$

$$a\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}} - \overrightarrow{\mathrm{OP}}\right) + b\left(\overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OP}}\right) + c\left(\overrightarrow{\mathrm{OC}} - \overrightarrow{\mathrm{OP}}\right) = \vec{0} \quad \blacktriangleleft\ \text{始点を } O \text{ にした}$$

$$(a + b + c)\,\overrightarrow{\mathrm{OP}} = a\overrightarrow{\mathrm{OA}} + b\overrightarrow{\mathrm{OB}} + c\overrightarrow{\mathrm{OC}}$$

とりあえず、始点を O にそろえたらここまで式変形をすることができました。

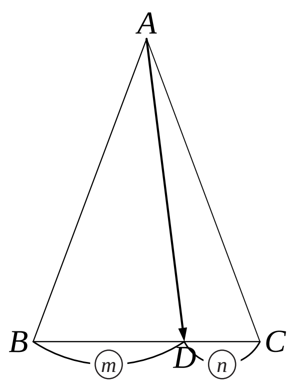
で、ここからなんですけど知らない人にとっては「なんでそうするの？」と思うような式変形をします。理由は別になくて、こうすればうまくいくからだけです。

次に使う公式としては、内分の公式です。

内分の公式

BC を $m:n$ に内分する点を D とする。

$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\dfrac{1}{m+n}\left(n\overrightarrow{\mathrm{AB}}+m\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right)$ と表される。



この内分の公式から分かるように、ベクトルで 2 項の和なら内分の公式を使うことができます。

$(a+b+c)\overrightarrow{\mathrm{OP}}=a\overrightarrow{\mathrm{OA}}+b\overrightarrow{\mathrm{OB}}+c\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ の右辺は 3 項の和です。でも、 2 項の場合だったら内分の公式を使えるんだったよね。だから、ここから強引に $a\overrightarrow{\mathrm{OA}}+b\overrightarrow{\mathrm{OB}}+c\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ を 2 項の和で考えて、内分の公式を適用することにします。

右辺の $a\overrightarrow{\mathrm{OA}}+b\overrightarrow{\mathrm{OB}}+c\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ でとりあえず $a\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\left(b\overrightarrow{\mathrm{OB}}+c\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right)$ とでもして、強引に右 2 つ項を内分の公式に適用できる形にします。

なぜ右 2 つを選んだかについてですが、これはどれを選んでもいいのですが、この右 2 つを選ぶものが一番見やすい式になってくれるので選んだだけです。別に根拠はないので、解き方を覚えておいてください。

ここから、$b\overrightarrow{\mathrm{OB}}+c\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ なんですが、仮に $\dfrac{1}{b+c}\left(b\overrightarrow{\mathrm{OB}}+c\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right)$ だったら内分の公式を使うことができるよね。でも、勝手に $\dfrac{1}{b+c}$ をかけたらダメなので、$(b+c)\cdot\dfrac{1}{b+c}$ をかけることにします。

これだったら、$(b+c)\cdot\dfrac{1}{b+c}=1$ なので、別にかけても等式は成立したままだよね。

$$
\begin{aligned}
&b\overrightarrow{\mathrm{OB}}+c\overrightarrow{\mathrm{OC}}\\
=&(b+c)\cdot\frac{1}{b+c}\left(b\overrightarrow{\mathrm{OB}}+c\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right)
\end{aligned}
$$

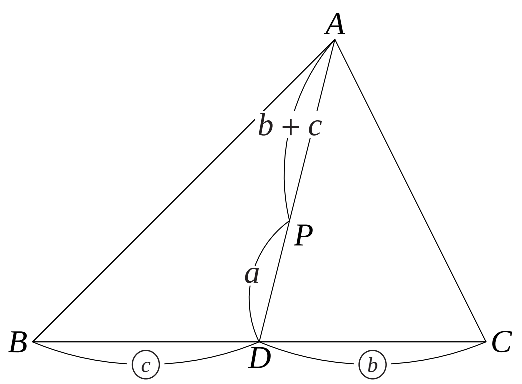
ここで先ほどの内分点の公式より $\dfrac{1}{b+c}\left(b\overrightarrow{\mathrm{OB}}+c\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right)$ は、BC を $c:b$ に内分する点です。この点を D とおきます。

$\dfrac{1}{b+c}\left(\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right)=\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ となるので、

$$
(a+b+c)\overrightarrow{\mathrm{OP}}=a\overrightarrow{\mathrm{OA}}+b\overrightarrow{\mathrm{OB}}+c\overrightarrow{\mathrm{OC}}
$$

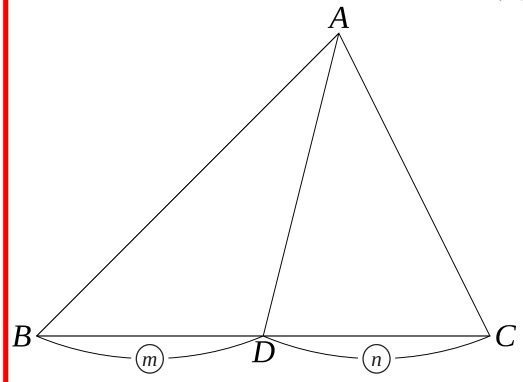
$$
\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{1}{a+b+c}\left(a\overrightarrow{\mathrm{OA}}+(b+c)\overrightarrow{\mathrm{OD}}\right)
$$

先ほどの内分の公式より点 P は AD を $(b+c):a$ に内分する点です。これで点 P がどこにあるのか求めることができました。



ここからは、それぞれの面積比を求めるだけです。この面積比は中学生の知識を使って解くことができます。忘れている人もいると思うので一応まとめておきます。

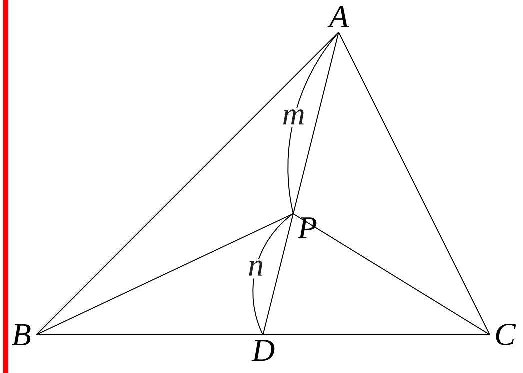
面積比　その１



上図のようなとき、三角形 ABC の面積を S とすると

(三角形 ABD の面積) $= \dfrac{m}{m+n}S$,　　　(三角形 ADC の面積) $= \dfrac{n}{m+n}S$ となる。

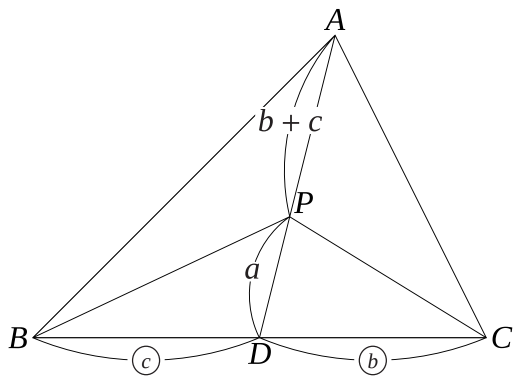
面積比　その２



上図のようなとき、三角形 ABC の面積を S とすると

(三角形 PBC の面積) $= \dfrac{n}{m+n}S$ となる。

これさえ踏まえれば、簡単に解くことができます。



三角形 ABC の面積を S とし、三角形 PBC などの面積を $S(PBC)$ と表記することにします。

$S(PBC) = \dfrac{a}{a+b+c}S$ ◀ 面積比その 2 より

$S(ADC) = \dfrac{b}{b+c}S$ ◀ 面積比その 1 より

$$\begin{aligned} S(PCA) &= \frac{b+c}{a+b+c}S(ADC) \quad \text{◀ 面積比その 1 より} \\ &= \frac{\cancel{b+c}}{a+b+c}\,\frac{b}{\cancel{b+c}}S \quad \text{◀ } S(ADC) = \frac{b}{b+c}S \text{ より} \\ &= \frac{b}{a+b+c}S \end{aligned}$$

$S(ADB) = \dfrac{c}{b+c}S$ ◀ 面積比その 1 より

$$\begin{aligned} S(PAB) &= \frac{b+c}{a+b+c}S(ADB) \quad \text{◀ 面積比その 1 より} \\ &= \frac{\cancel{b+c}}{a+b+c}\,\frac{c}{\cancel{b+c}}S \quad \text{◀ } S(ADB) = \frac{c}{b+c}S \text{ より} \\ &= \frac{c}{a+b+c}S \end{aligned}$$

以上より

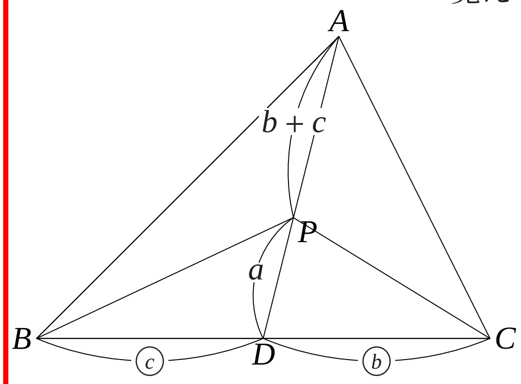
$$\begin{aligned} S(PBC):S(PCA):S(PAB) &= \frac{a}{a+b+c}S : \frac{b}{a+b+c} : \frac{c}{a+b+c} \\ &= a:b:c \end{aligned}$$

これで、今回の問題は終了です。きれいな形になったと思います。最初にも話しました

が、この形さえ知っていれば、一瞬で計算をすることができます。

導き方とともに計算結果も公式として覚えておけばいいと思います。

覚えておくべき面積比



$a,\ b,\ c>0$ で $a\overrightarrow{\mathrm{PA}}+b\overrightarrow{\mathrm{PB}}+c\overrightarrow{\mathrm{PC}}=\vec{0}$ が成立するとき、

(三角形 PBC の面積) : (三角形 PCA の面積) : (三角形 PAB の面積) $= a : b : c$ である

今回はこれで終了です。それでは、がんばってください。

河見賢司

高校数学の勉強法
http://www.hmg-gen.com/

感想はこちらまでメールをください（何か言ってもらえると嬉しいです）
magdai@hmg-gen.com