問題

$f(x) = 7\sin x + \sin 2x$ の最大値と最小値を求めよ

数学 III の微分を使った最大値、最小値問題です。決して難しい問題ではないですが、学校等ではあまり解説をしないタイプの問題 (入試では頻出！) です。

難関大学を目指している人は、このくらいの問題はさっさと解けないといけないと思いますが、ひょっとしたら解けないという人もいるかもしれません。この問題は、とにかく頻出タイプなのでしっかりと理解しておいてください。

【解説】
まず、問題を見てどうしようかな？と考えます。三角関数の問題なので、適当に文字を置き換えて解いていくのかな？と思いますが、この場合文字の置き換えで解いていくのは無理です。

三角関数の文字の置き換えはいくつかのパターンがありますが、どれにもあてはまらないからです。どういったパターンがあるか知りたいという人は、以下のプリントを見てください。

「$\sin\theta = X$, $\cos\theta = X$ とするタイプ」http://www.hmg-gen.com/sankaku6.pdf
「$\sin\theta + \cos\theta = X$ とするタイプ」http://www.hmg-gen.com/sankaku7.pdf
「$\sin\theta - \cos\theta = X$ とするタイプ」http://www.hmg-gen.com/sankaku8.pdf
「$\sin\theta\cos\theta = X$ とするタイプ」http://www.hmg-gen.com/sankaku9.pdf

で、この問題はどのタイプにも当てはまらないので文字の置き換えで解いていくことは無理です。そこで、微分をして解いていくことにします。

(＊) 最大値、最小値問題では微分を使って解くことが多いですが、なぜ微分をするのかということを理解できていない人が多いです。

まず、「関数の最大値、最小値問題はグラフをかいて解いていく！」ということを覚えてください。微分をする理由ですが、グラフをかくためには微分をする必要があるからです (複雑な関数のグラフをかくときって、微分したよね)。

微分した場合、グラフをかかなくても増減表だけで最大値、最小値を判断できますが、「なぜ微分をしたか？」には、「グラフをかくため」と思えるようになっておいてください。

では、問題を解いていきます。この問題は x の範囲は与えられていないです。範囲があった方が考えやすいので、範囲を設定することにします。

$f(x) = 7\sin x + \sin 2x$ です。$7\sin x$ の周期は 2π で $\sin 2x$ の周期は π です。両方合わせて、周期は 2π になります。

ということは、$f(x)$ の最大値、最小値は $0 \leqq x < 2\pi$ における最大値、最小値と一致するので、以下 $0 \leqq x < 2\pi$ の範囲で考えていくことにします。

$$
\begin{aligned}
f(x) &= 7\sin x + \sin 2x \\
f'(x) &= 7\cos x + 2\cos 2x \quad \blacktriangleleft \text{微分した} \\
&= 7\cos x + 2(2\cos^2 x - 1) \quad \blacktriangleleft \text{2倍角の公式 } \cos 2x = 2\cos^2 x - 1 \text{ を使い } \cos x \text{ のみの式にした！} \\
&= 4\cos^2 x + 7\cos x - 2 \\
&= (\cos x + 2)(4\cos x - 1)
\end{aligned}
$$

とりあえず、微分をしてここまでたどりつくことができました。ここから、どうするか分からない人がいますが、微分をする目的は次のことを知りたいだけです。

微分

$f'(x) > 0$ の範囲では、グラフは増加関数

$f'(x) < 0$ の範囲では、グラフは減少関数

このことより、$f'(x)$ **は正負さえ分かれば十分**ということが言えます。**微分をして、知りたいことは** $f'(x)$ **の正負だけ**です。

このことを頭にいれて $f'(x) = (\cos x + 2)(4\cos x - 1)$ を見てみると、
$\cos x + 2$ は $-1 \leqq \cos x \leqq 1$ を考えると常に正です。

$f'(x)$ は、正負さえ分かればＯＫです。$f'(x) = (\cos x + 2)(4\cos x - 1)$ で、$\cos x + 2 > 0$ を考え、$f'(x)$ の正負は $4\cos x - 1$ の正負と一致します。

ここから、$4\cos x - 1$ の正負を調べたらいいのですが、正負を調べるには、次のことを覚えるようにしてください。

$f'(x)$ の正負の調べ方

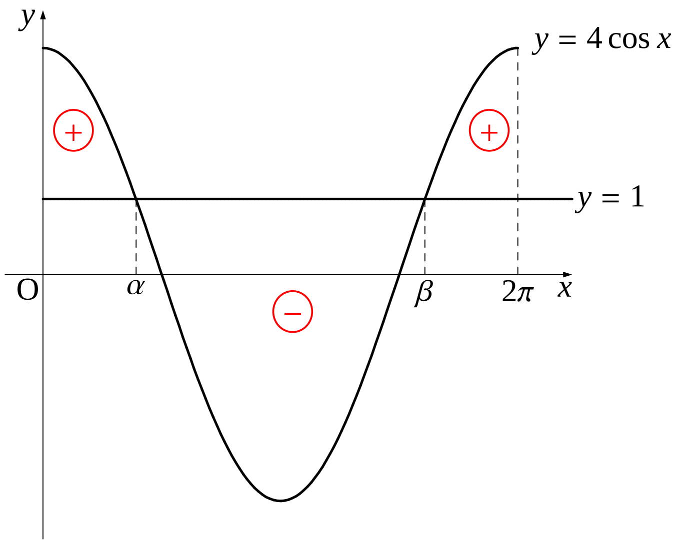
$f'(x)$ の正負を調べるには、$f'(x) = h(x) - g(x)$ の形にして、$h(x)$ と $g(x)$ のグラフをかき、その上下関係で正負を調べる。

$\Uparrow$

$f'(x) = h(x) - g(x)$ の正負は $h(x)$ の方が $g(x)$ より上側にあるときは正となり、下側にあるときは負となります。

$f'(x)$ が複雑な関数になるときは、このようにグラフをかいて正負を考えるのが視覚的に判断できるので、一番ラク

今回は $f'(x)$ は $4\cos x - 1$ の正負と一致します。先ほどのグラフをかいて考えるという方針に従って $h(x) = 4\cos x$ と $g(x) = 1$ として、グラフをかきたいと思います。



$y = 4\cos x$ と $y = 1$ のグラフをかけば上図のようになります。$0 \leqq x \leqq \alpha$ と $\beta \leqq x \leqq 2\pi$ の範囲では、$y = 4\cos x$ の方が $y = 1$ よりも上側にある (この区間では、$4\cos x$ の方が 1 よりも大きい) ので $f'(x) = 4\cos x - 1 \geqq 0$ となり、$\alpha \leqq x \leqq \beta$ の範囲では $y = 4\cos x$ の方が $y = 1$ より下側にある (この区間では 1 の方が $4\cos x$ よりも大きい) ので $f'(x) = 4\cos x - 1 \leqq 0$ となります。

今回も、このくらいなら $f'(x)$ の正負を直接考えることもできるかもしれませんが、より複雑になってくると直接考えることは難しくなってきます。

そんなときは、このグラフをかいて上下関係で正負を調べるという方法を思い出せるようにしておいてください。

また、$y = 4\cos x$ と $y = 1$ との交点を α, β としましたが、これは具体的な値は求まりません。具体的な値が求まらないと、「間違っているのでは？」と思う人もたまにいますが、求まらないこともあります。むしろ、大学受験に出題されるような難しい問題の場合、求まらない場合も当たり前のように出てきます。

また、この問題は、「最大値、最小値を求めよ」だけで「それを与えるような x を求めよ」という記述がありません。

こういったときは、「x が求められない」ということが多いです。覚えておいてください。それでは、問題に戻ります。

今回は、$f(x) = 7\sin x + \sin 2x = 7\sin x + 2\sin x\cos x$ なので、α, β の値が求まらなくても $\sin\alpha, \cos\alpha$ や $\sin\beta, \cos\beta$ の値さえ分かっていれば $f(\alpha), f(\beta)$ の値を求めることができます。$\cos\alpha$ や $\sin\alpha$ だったら求めることができるよね。

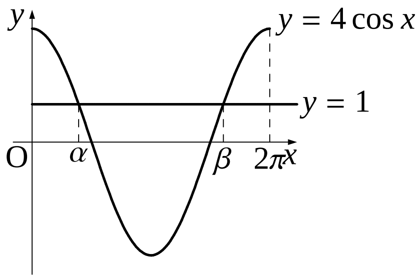
三角関数の相互関係を使い $\cos x = \dfrac{1}{4}$ のとき、$\sin x = \pm\dfrac{\sqrt{15}}{4}$ です。

図より、$0 < \alpha < \pi, \pi < \beta < 2\pi$ より、$\sin\alpha > 0, \sin\beta < 0$ となることを考えて
$\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{15}}{4}, \sin\beta = -\dfrac{\sqrt{15}}{4}$ となります。ここまできたら後は単純に増減表をかいて解いていくだけなので解答に進みたいと思います。

【解答】
$f(x) = 7\sin x + \sin 2x$ の最大値、最小値は周期を考え、$0 \leqq x < 2\pi$ における最大値、最小値と一致する。以下、$0 \leqq x < 2\pi$ の範囲における最大値、最小値を求めることとする。

$$\begin{aligned}
f(x) &= 7\sin x + \sin 2x \\
f'(x) &= 7\cos x + 2\cos 2x \quad \blacktriangleleft \text{微分した} \\
&= 7\cos x + 2(2\cos^2 x - 1) \quad \blacktriangleleft \text{ 2 倍角の公式 } \cos 2x = 2\cos^2 x - 1 \text{ を使い } \cos x \text{ のみの式にした！} \\
&= 4\cos^2 x + 7\cos x - 2 \\
&= (\cos x + 2)(4\cos x - 1)
\end{aligned}$$

$\cos x + 2$ は常に正なので、$f'(x)$ の正負は $4\cos x - 1$ の正負と一致する。



上図のように $4\cos x = 1$ の交点の x 座標を $\alpha, \beta\,(\alpha < \beta)$ とする。

$\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{15}}{4},\ \sin\beta = -\dfrac{\sqrt{15}}{4}$ となることを考え

$$\begin{aligned} f(\alpha) &= 7 \cdot \frac{\sqrt{15}}{4} + 2 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{\sqrt{15}}{4} \\ &= \frac{7}{4}\sqrt{15} + \frac{1}{8}\sqrt{15} \\ &= \frac{15}{8}\sqrt{15} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(\alpha) &= 7 \cdot \left(-\frac{\sqrt{15}}{4}\right) + 2 \cdot \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{\sqrt{15}}{4}\right) \\ &= -\frac{7}{4}\sqrt{15} - \frac{1}{8}\sqrt{15} \\ &= -\frac{15}{8}\sqrt{15} \end{aligned}$$

増減表は、以下の通り

x	0		α		β		2π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	$f(\beta)$	$\nearrow$	

増減表と $f(\alpha) = \dfrac{15}{8}\sqrt{8},\ f(\beta) = -\dfrac{15}{8}\sqrt{15},\ f(0) = f(2\pi) = 0$ であることを考え、

最大値は $\dfrac{15}{8}\sqrt{15}$ となり、

最小値は $-\dfrac{15}{8}\sqrt{15}$ となる。

これで、今回の問題は終わりです。微分はグラフで考えるということを知らなかった人もいると思います。このグラフで考えるという手法は、本当に使える手法ですので、ぜひとも使いこなせるようになっておいてください。

河見賢司

高校数学の勉強法
http://www.hmg-gen.com/

感想はこちらまでメールをください（何か言ってもらえると嬉しいです）
magdai@hmg-gen.com