問題

2 曲線 $y = \sin x,\ y = \cos x \ \left(0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}\right)$ と直線 $y = 1$ とで囲まれた部分を直線 $y = 1$ のまわりに回転して得られる立体の体積を求めよ。

この問題は、新潟大学の過去問です。

積分とは簡単に言うと、**微小部分を足し合わせて全体を作る**ということです。この考えは、本当に積分の基礎なのにしっかりと理解できている人が本当の少ないです。

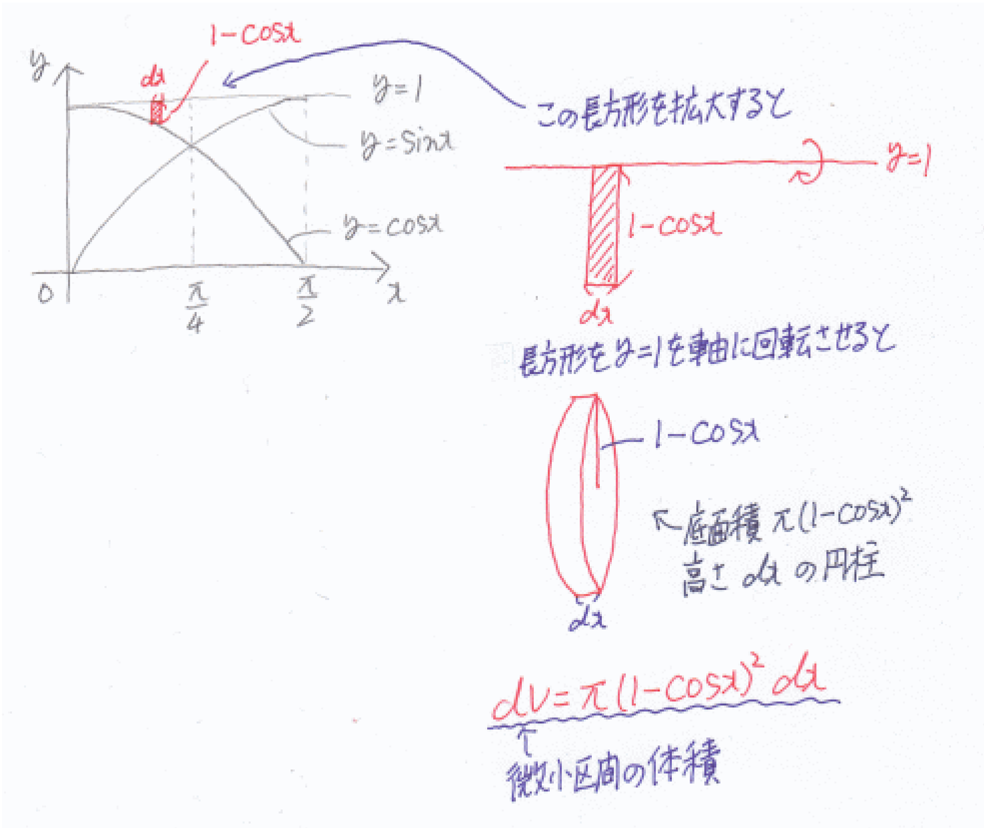
今回の問題は、回転体の体積です。回転体の体積の公式は $V = \int \pi y^2\,dx$ だから、なんて公式で覚えている人がいますが、これは積分の「微小区間を足し合わせる」ということさえ覚えておけば簡単に導けます。

回転体の体積を公式として覚えている人は、今回のような回転軸が $x$ 軸や $y$ 軸以外になるととたんに対処できなくなります。

実際の大学受験で出題される、回転体の体積はほとんどの場合 $x$ 軸回転や $y$ 軸回転ですが、なぜそうなるかという意味をしっかりと理解しておくようにしてください。

「積分は、微小区間を足し合わせたもの」ということを知らないという人は、http://www.hmg-gen.com/kaitou2-12.pdf を見てください。それでは、問題に進みたいと思います。

【解答】




求める立体の体積を $V$ とすると、対称性を考え◀$y=\sin x$ と $y=\cos x$ は、同じ形をしている。当然 $0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{4}$ にある部分の回転体の体積と $\frac{\pi}{4} \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}$ にある部分の体積は等しい

$$
\begin{aligned}
V &= 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \pi (1-y)^2\,dx \\
&= 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1-\cos x)^2\,dx \\
&= 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1-2\cos x+\cos^2 x)\,dx \\
&= 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(1-2\cos x+\frac{1+\cos 2x}{2}\right)dx \quad \blacktriangleleft\ \cos 2x = \frac{1+\cos 2x}{2}\ \text{を代入した} \\
&= 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{3}{2}-2\cos x+\frac{\cos 2x}{2}\right)dx \\
&= 2\pi \left[\frac{3}{2}x-2\sin x+\frac{\sin 2x}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} \\
&= 2\pi \left(\frac{3}{2}\cdot\frac{\pi}{4}-2\sin\frac{\pi}{4}+\frac{\sin\frac{\pi}{2}}{4}\right) \\
&= 2\pi\left(\frac{3}{8}\pi-\sqrt{2}+\frac{1}{4}\right) \quad \blacktriangleleft\ \text{これが答え！}
\end{aligned}
$$

今回の問題はどうだったでしょうか？大学に入学すると、積分は微小区間の体積を足し合わせたものだからということは当たり前のように授業に出てきます。

ですが、多くの高校生が理解できていません。ごくごく簡単な事柄なのでしっかりと理解しておいてください。

河見賢司

高校数学の勉強法
http://www.hmg-gen.com/

感想はこちらまでメールをください（何か言ってもらえると嬉しいです）
magdai@hmg-gen.com