問題

$\triangle$ABC の内心を I、$BC = a$, $CA = b$, $AB = c$ とする。任意点を O とするとき、$\overrightarrow{\mathrm{OI}}$ を a, b, c, $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ を使って表せ。

【解説】
ベクトルの問題で、内心の公式を導きなさいという問題です。三角形には５心（重心、内心、外心、垂心、傍心）があります。

この中で、ベクトルの問題で出題されやすいのは重心、内心、外心です。そして、重心と内心には公式があります。結果そのものも重要ですが、導き方も重要です。今回は、その中で内心の公式を導きなさいという問題です。

内心については、知っている人も多いとは思いますが、一応まとめておきます。

内心

内心とは、内接円の中心のことで、角の２等分線の交点である。

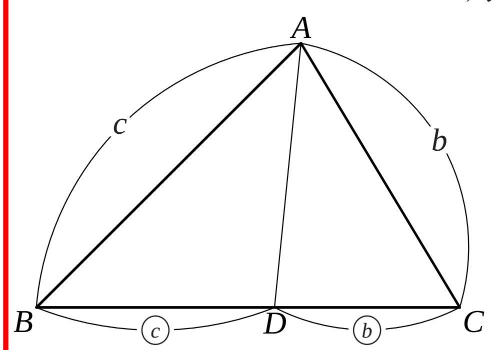
また、内心は I で表すことが多い

ちなみに、外心は垂直２等分線の交点です。内心と混同しやすいので、注意して下さい。

最終的に、$\overrightarrow{\mathrm{OI}}$ を求めるんですが、まずは $\overrightarrow{\mathrm{AI}}$ を求めていきます。

知ってると思うけど、以下の角の２等分線の性質をかいておきます。

角の２等分線の性質



左図のように、$AB = c$, $AC = b$ で、AD が $\angle$A の２等分線のとき $BD : DC = c : b$ が言える。

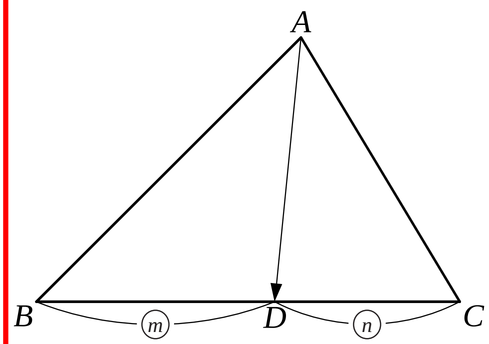
これは、逆も成立します。
つまり、$BD : DC = c : b \Rightarrow AD$ は $\angle$A の２等分線である。

角の２等分線は、他にもないことはないですが、ほとんどの場合上記の性質を使って解いていきます。数学は、**与えられた条件は必ず使います。ですから、角の２等分線と問**

題文で与えられた時点で、「ああ、この性質を使うんだなぁ」と思えるようになっておいてください。

次に、ベクトルの内分の公式です。

ベクトルの内分の公式



左図のように、D は BC を $m:n$ に内分する点。

このとき、$\overrightarrow{\mathrm{BD}}=\dfrac{n}{m+n}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\dfrac{m}{m+n}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ である。

上記の公式は、本当によく使う公式ですが、なぜ成立するか？ということを知らない人が多いです。簡単に証明できるので、一応証明をしておきます。

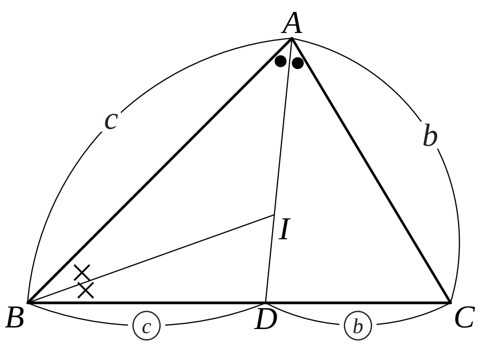
【ベクトルの内分の公式の証明】

$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{BD}}$

$=\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\dfrac{m}{m+n}\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ ◀ BC を $\dfrac{n}{m+n}$ 倍したら BD になるので、$\overrightarrow{\mathrm{BD}}=\dfrac{m}{m+n}\overrightarrow{\mathrm{BC}}$

$=\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\dfrac{m}{m+n}\left(\overrightarrow{\mathrm{AC}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right)$ ◀ $\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ の始点を A に変更した

$=\dfrac{n}{m+n}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\dfrac{m}{m+n}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ ◀ 公式が導けた！

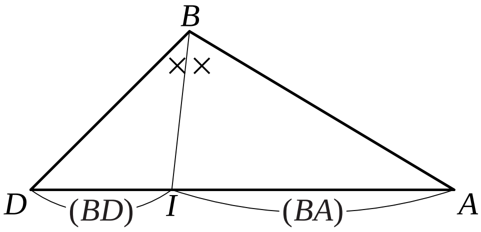


それでは、この内分の公式を使ってまずは、$\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ を求めたいと思います。

内分の公式より $\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\dfrac{b}{b+c}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\dfrac{c}{b+c}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ となります。

まずは、$\overrightarrow{\mathrm{AI}}$ を求めることを目標とします。$\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ が求まっているので、$\overrightarrow{\mathrm{AI}}$ を求めるには $AI : ID$ が分かれば $\overrightarrow{\mathrm{AI}}$ を求めることができます。

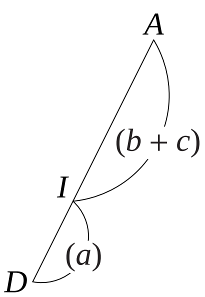
そこで、$AI : ID$ を求めたいんだけど、I は内心なので角 A の 2 等分線でもあるけど、角 B の 2 等分線でもあるんだよね。だから、角の 2 等分線の性質より $AI : ID = BA : BD$ になるんじゃない。どういうふうに考えたのかというと $\triangle \mathrm{BAD}$ で考えました。もし分かりにくいという人は、次のように図をかきなおすと理解できると思います。



上図より、$AI : ID = BA : BD$ となります。$BA = c$ って分かってるけど BD は、まだ長さが分かっていないので求めることにします。BD は $BC(= a)$ を $c : b$ に内分する点なので $BD = \dfrac{c}{c+b}a$ となります。

$BA = c,\ BD = \dfrac{c}{b+c}a$ より、$AI : ID$ を求めたいと思います。例えば $4 : 2 = 2 : 1$ となるようにかけたり、割ったりすることは自由です。このことを頭に入れて、

$$
\begin{aligned}
AI : ID &= BA : BD \\
&= c : \frac{c}{b+c}a \quad \blacktriangleleft\ BA = c,\ BD = \frac{c}{b+c}a \text{ をそれぞれ代入} \\
&= 1 : \frac{a}{b+c} \quad \blacktriangleleft\ \text{両方とも } c \text{ が含まれているので、} c \text{ で割った} \\
&= b+c : a \quad \blacktriangleleft\ \text{分数だと考えにくいので、両方に } b+c \text{ をかけた}
\end{aligned}
$$



上図より、$\overrightarrow{\mathrm{AD}} = \dfrac{b+c}{a+b+c}\overrightarrow{\mathrm{AI}}$ となる。

$$\overrightarrow{\mathrm{AI}}$$

$$=\frac{b+c}{a+b+c}\overrightarrow{\mathrm{AD}}$$ ◀ AD を $\frac{b+c}{a+b+c}$ 倍すれば AI になる

$$=\frac{b+c}{a+b+c}\left(\frac{b}{b+c}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{c}{b+c}\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right)$$

$$=\frac{1}{a+b+c}\left(b\overrightarrow{\mathrm{AB}}+c\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right)$$ ◀ これで、$\overrightarrow{\mathrm{AI}}$ を求めることができた！

これで、$\overrightarrow{\mathrm{AI}}$ を求めることができました。後は、ここから $\overrightarrow{\mathrm{OI}}$ を求めたらいいのですが、始点を O に変更して整理するだけです。

$$\overrightarrow{\mathrm{AI}}=\frac{1}{a+b+c}\left(b\overrightarrow{\mathrm{AB}}+c\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right)$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OI}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\frac{1}{a+b+c}\left(b(\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}})+c(\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}})\right)$$ ◀ 始点を O にした！

$$\overrightarrow{\mathrm{OI}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{1}{a+b+c}\left(b(\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}})+c(\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}})\right)$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OI}}=\frac{1}{a+b+c}\left(a\overrightarrow{\mathrm{OA}}+b\overrightarrow{\mathrm{OB}}+c\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right)$$ ◀ これが答え！

少々長かったですが、これで $\overrightarrow{\mathrm{OI}}$ を求めることができました。O が任意点というのがよく分からないという人もたまにいますが、O はどこにあってもこの公式は成立しますよ、ということです。

例えば、O が A と一致しているときを考えます。一致しているので、$O=A$ となります。

$$\overrightarrow{A\mathrm{I}}=\frac{1}{a+b+c}\left(a\overrightarrow{A\mathrm{A}}+b\overrightarrow{A\mathrm{B}}+c\overrightarrow{A\mathrm{C}}\right)$$ ◀ 内分の公式で O を A に置き換えた！

$$\overrightarrow{\mathrm{AI}}=\frac{1}{a+b+c}\left(b\overrightarrow{\mathrm{AB}}+c\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right)$$ ◀ $\overrightarrow{\mathrm{AI}}$ が求まった！

この $\overrightarrow{\mathrm{AI}}$ は、問題を解くときに求めましたがそれと一致しています。この公式さえ覚えておけば、内心は一瞬で求めることができます。ただ、導き方の過程もとても重要で、試験にもよく出てきます。慣れてくれば簡単です。何度か解いてしっかりと理解しておいてください。

河見賢司

高校数学の勉強法
http://www.hmg-gen.com/

感想はこちらまでメールをください（何か言ってもらえると嬉しいです）
magdai@hmg-gen.com