問題

数列 $\{x_n\}$ を $x_1 = 1,\ x_2 = 2,\ x_{n+2} = \dfrac{2}{x_{n+1}} + x_n\ (n = 1, 2, 3, \cdots)$ で定める。また、数列 $\{y_n\}$ は $y_n = x_{n+1}x_n\ (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ を満たす。このとき、次の問いに答えよ。

(1) 数列 $\{y_n\}$ の一般項を求めよ

(2) 自然数 n に対して、$x_{n+2} = \dfrac{n+1}{n}x_n$ が成り立つことを示せ

(3) 自然数 k に対して、$x_{2k+1} = \dfrac{4^k(k!)^2}{(2k)!}$ が成り立つことを示せ

【解説】

2008 年の和歌山大学の過去問で、漸化式の問題です。慣れていない人にとっては少し式変形が難しいかもしれません。この問題は、範囲としては数学Bの数列ですが、こういった式変形はどちらかと言うと数学 III の積分の問題などで、必要となることが多いです。

よく出てくるので、しっかりと理解しておいてください。それでは、問題に進みます。

【(1) の解説】

これは、普通に解いていくだけです。数列 $\{y_n\}$ を求めよといった問題ですけど、$\{y_n\}$ を求めるには、問題文に与えられた式 $y_n = x_{n+1}\,x_n$ と $x_{n+2} = \dfrac{2}{x_{n+1}} + x_n$ この 2 つの式を使って求めていくしかありません。

問題をみた時点では、解けるかどうかわかりませんが、「とりあえずこの 2 式を使って変形していけば解けるようになってくれている」そう思って解いていきます。

【(1) の解答】

$y_n = x_{n+1}x_n$ より、$y_{n+1} = x_{n+2}x_{n+1}$

⇑ よく分からないけど、とりあえず $x_{n+2} = \dfrac{2}{x_{n+1}} + x_n$ の式を使いたい。これを使うためには x_{n+2} が必要なので、x_{n+2} が出てくる形にした！

$$
\begin{aligned}
y_{n+1} &= x_{n+2}x_{n+1} \\
&= \left(\frac{2}{x_{n+1}} + x_n\right) x_{n+1} \quad \blacktriangleleft\ x_{n+2} = \frac{2}{x_{n+1}} + x_n \text{ を代入した} \\
&= 2 + x_n x_{n+1} \\
&= 2 + y_n \quad \blacktriangleleft\ x_n x_{n+1} = y_n \text{ を代入した}
\end{aligned}
$$

よって、$y_{n+1} - y_n = 2$ となる。これより、y_n は公差 2 の等差数列であり、初項は $y_1 = x_1x_2 = 2$

である。

よって、
$y_n = 2 + (n-1) \cdot 2$ ◀ 等差数列の公式 $a_n = a + (n-1)d$ より
$\quad = 2n$ ◀ これが答え

【(2)の解説】
どう解けばいいかよく分かんないけど、**数学の受験問題で** (1), (2) **となっていたら、前問の結果を使って解いていく**ということが本当に多いです。この原則に従って (1) を使っていくのかな？と思います。

まずこの問題では、$x_{n+2} = \dfrac{n+1}{n}x_n$ を示せとなっていますが、(1) の y_n は $y_n = x_{n+1}x_n = 2n$ です。この式には、x_{n+2} は出てきません。

証明したい式には x_{n+2} が出ているので、当然 x_{n+2} が必要になります。そこで、$x_{n+1}x_x = 2n$ の n を $n+1$ に置き換えて、$x_{n+2}x_{n+1} = 2(n+1)$ とでもして x_{n+2} を含んだしきにとりあえずしておきます。

で、ここから問題の $x_{n+2} = \dfrac{n+1}{n}x_n$ は示せないかな？と考えます。今、手元にある式は $x_nx_{n+1} = 2n$ と $x_{n+1}x_{n+2} = 2(n+1)$ です。この 2 式から $x_{n+2} = \dfrac{n+1}{n}x_n$ を示せばよい訳ですが、$x_{n+2} = \dfrac{n+1}{n}x_n$ には x_{n+1} が含まれていません。ということは、$x_nx_{n+1} = 2n$ と $x_{n+1}x_{n+2} = 2(n+1)$ の 2 式から、x_{n+1} を消去したらＯＫかな？と考えていきます。それでは、解答に進みます。

【(2)の解答】
(1) より、$x_{n+1}x_n = 2n \cdots$ ①。また、$x_{n+2}x_{n+1} = 2(n+1) \cdots$ ②

x_n は明らかに 0 ではないので、① の両辺を x_n で割ると $x_{n+1} = \dfrac{2n}{x_n}$ となる。これを ② に代入すると

$$x_{n+2} \cdot \frac{2n}{x_n} = 2(n+1)$$
$$x_{n+2} = \frac{n+1}{n}x_n \quad //$$

【(３) の解説】
これは、少し難しい漸化式の変形です。と言っても、大学受験ではしばしば使う式変形なのでしっかりと理解しておいてください。分母 (または分子) を階乗の形にするために、分母分子に適当な数をかけて解いていきます。それでは、問題に進みたいと思います。

今回の問題も、前問の結果を使って解いていきます。(２) で証明した $x_{n+2} = \dfrac{n+1}{n}x_n$ の n を $2k-1$ に置き換えると、x_{2k+1} が出てきてくれます。とりあえず。この式変形をしてみます。

$x_{n+2} = \dfrac{n+1}{n}x_n$ の n を $2k-1$ に置き換えると、$x_{2k+1} = \dfrac{2k}{2k-1}x_{2k-1}$ となります。

この作業をどんどんと繰り返しいきます。

$$x_{2k+1} = \frac{2k}{2k-1}x_{2k-1}$$

$$x_{2k-1} = \frac{2k-2}{2k-3}x_{2k-3}$$

$$x_{2k-3} = \frac{2k-4}{2k-5}x_{2k-5}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$x_3 = \frac{2}{1}x_1$$

上記の式変形などを考えて、

$$\begin{aligned} x_{2k+1} &= \frac{2k}{2k-1}\cdot\frac{2k-2}{2k-3}\cdot\frac{2k-4}{2k-5}\cdot\cdots\cdot\frac{2}{1}\cdot x_1 \\ &= \frac{2k\cdot 2(k-1)\cdot\cdots\cdot 2}{(2k-1)\cdot(2k-3)\cdot(2k-5)\cdot\cdots\cdot 1} \end{aligned}$$

で、ここからはまずは分子の方を考えたいと思います。

分子ですが、全てに 2 があります。また、個数が k 個ということを考えると

$2k \cdots 2(k-1) \cdots 2$

$=2^k\{k \cdot (k-1) \cdots 2 \cdot 1\}$

上記のようになります。$k \cdot (k-1) \cdots 2 \cdot 1$ は $k!$ です。分からないという人は $k \cdot (k-1) \cdots 2 \cdot 1 = 1 \cdots (k-1) \cdot k$ とひっくり返したら分かりやすいと思います。

次に、分母を考えます。

分母は $(2k-1) \cdot (2k-3) \cdot (2k-5) \cdots\cdots 1$ は奇数同士の積です。

この部分が仮に $2k \cdot (2k-1) \cdot (2k-2) \cdot (2k-3) \cdot (2k-4) \cdot (2k-5) \cdots 2 \cdot 1$ なら、$(2k)!$ となります。

赤い部分だけを抜き出すと $2k \cdot (2k-2) \cdot (2k-4) \cdots\cdot 2 = 2^k\{k \cdot (k-1) \cdot (k-2) \cdots 2 \cdot 1\} = 2^k \cdot k!$ です。

つまり、分母に $2^k \cdot k!$ をかけると $(2k)!$ になります。ただ、分母だけ勝手に $2^k \cdot k!$ をかけてはダメなので、同じ数を分子にもかけます。それでは、解答に進みたいと思います。

【(3) の解答】

(2) より、

$$
\begin{aligned}
x_{2k+1} &= \frac{2k}{2k-1} x_{2k-1} \\
&= \frac{2k}{2k-1} \cdot \frac{2k-2}{2k-3} \cdots \frac{2}{1} \cdot x_1 \\
&= \frac{2k}{2k-1} \cdot \frac{2k-2}{2k-3} \cdots \frac{2}{1} \\
&= \frac{2k \cdot (2k-2) \cdot (2k-4) \cdots 2 \cdot 1}{(2k-1) \cdot (2k-3) \cdot (2k-5) \cdots 1} \\
&= \frac{2k \cdot (2k-2) \cdot (2k-4) \cdots 2 \cdot 1}{(2k-1) \cdot (2k-3) \cdot (2k-5) \cdots 1} \cdot \frac{2k \cdot (2k-2) \cdot (2k-4) \cdots\cdot 2}{2k \cdot (2k-2) \cdot (2k-4) \cdots\cdot 2} \\
&= \frac{(2^k k!)^2}{(2k)!} \\
&= \frac{4^k (k!)^2}{(2k)!} \quad //
\end{aligned}
$$

今回の問題はどうだったでしょうか。少し難しく感じた人も多い思います。こういった式変形は、学校ではあまり勉強をしないというところも多いと思いますが、受験では頻出です。しっかりとりかいしておいてください。

河見賢司

高校数学の勉強法
http://www.hmg-gen.com/

感想はこちらまでメールをください（何か言ってもらえると嬉しいです）
magdai@hmg-gen.com