問題

関数 $f(x)=\displaystyle\int_x^{2x+1}\frac{1}{t^2+1}\,dt$ について、次の各問いに答えよ

(1) $f(x)=0$ となる x の値の範囲を求めよ

(2) $f'(x)=0$ となる x の値を求めよ

(3) $f(x)$ は最大値をもつか。もつならばその最大値を求めよ

【解説】

筑波大学の過去問です。問題としては、それほど難しくないですが、微分の公式を知っておく必要があります。試験で頻出と言う訳ではありません。たまに出てくる程度ですが、知らなければ絶対に解くことはできません。

ぜひとも覚えておいてください。

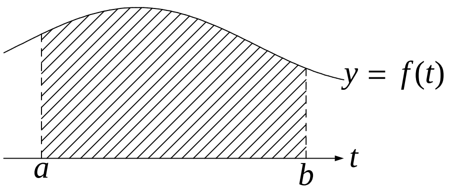
【(1)の解説】

答えから言ってしまうと、積分区間の上端と下端が一致するときです。

今回は、インテグラルの中身が $\dfrac{1}{t^2+1}$ です。$\dfrac{1}{t^2+1}$ は t の値にかかわらず常に正です。こういった時、積分をして 0 となってくれるのは積分区間の上端と下端が一致するときだけだよね。

ほとんどの人が分かっていると思うけど、一応説明しておきます。

$f(t)>0$ で $a<b$ のときは、$\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ は下図の斜線部の面積を表しています。面積は当然正なので、$\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt>0$ となります。



次に、$a > b$ のときですが $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt = -\int_b^a f(t)\,dt$ ◀ 積分区間を逆にした になります。

$\displaystyle\int_b^a f(t)\,dt$ も面積を表すので正で、$\displaystyle\int_b^a f(t)\,dt > 0$ になり、$\displaystyle -\int_b^a f(t)\,dt < 0$ となります。

これより $a > b$ のとき $\displaystyle\int_a^b f(t)dt < 0$ となります。

これで分かったと思うけど、$f(t)$ が常に正のとき積分した値が 0 になるには、積分区間の上端と下端が一致するときに限られます。

当たり前だけど、積分区間の上端と下端が一致するとき積分した値が 0 になるっていうのは大丈夫だよね。ほとんどの人が分かると思うけど、一応説明しておきます。

$f(t)$ の原始関数 (積分した関数) を $F(t)$ とします。

$\displaystyle\int_a^a f(t)\,dt = \Big[F(t)\Big]_a^a = F(a) - F(a) = 0$ ◀ 積分区間の上端と下端が一致するときは、0 になる

それでは、解答に進みます。

【(1) の解答】

常に $\dfrac{1}{t^2+1}$ なので、$f(x) = 0$ となるのは積分区間の上端と下端が一致するときのみである。

$x = 2x + 1$ より $x = -1$ ◀ これが答え

【(2) の解説】

まずは、次のことを覚えてください。

微分の公式

$$\frac{d}{dx}\int_{g(x)}^{h(x)} f(t)\,dt = h'(x)f(h(x)) - g'(x)(g(x))$$

数学 II で、$F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$ を微分すると $F'(x) = f(x)$ という公式があったと思うけど、この公式も上記にあてはめてみると成立しているということを確認できると思います。

それほど頻出というわけではないけど、覚えておかないと解けません。しっかりと覚えておいてください。

【(2) の解答】

$$f(x) = \int_{x}^{2x+1} \frac{1}{t^2+1}\,dt$$

$$f'(x) = (2x+1)'\frac{1}{(2x+1)^2+1} - x'\frac{1}{x^2+1}$$ ◀ 先ほどの微分の公式より

$$= \frac{2}{4x^2+4x+2} - \frac{1}{x^2+1}$$

$$= \frac{1}{2x^2+2x+1} - \frac{1}{x^2+1}$$

$$= \frac{x^2+1-(2x^2+2x+1)}{(2x^2+2x+1)(x^2+1)}$$ ◀ 通分をした

$$= \frac{-x^2-2x}{(2x^2+2x+1)(x^2+1)}$$

よって $f'(x) = 0$ となるのは、$-x^2-2x=0$ のとき、これを解いて $x = 0, -2$ ◀ これが答え

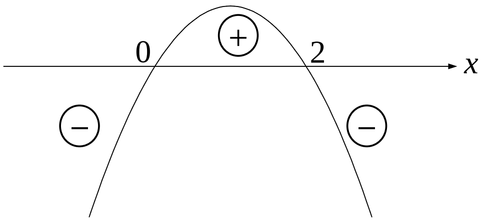
【(3) の解説】

よく分からないけど、関数の最大値・最小値問題ではグラフをかいて解いていくことが基本です (グラフ以前の増減表で求められることも多いですが)。

グラフをかくためには微分をする必要があるので、とりあえず微分をしてみます。微分は (2) でもうしてあるので、それを利用します。

(2) より、$f'(x) = \dfrac{-x^2-2x}{(2x^2+2x+1)(x^2+1)}$ です。ここで、x の値にかかわらず $2x^2+2x+1$ と x^2+1 は常に正です。ですから、$f'(x)$ の正負は分子の $-x^2-2x$ の正負に一致します。

(注) 微分で必要なのは、$f'(x)$ の正負だけです。正負に影響しないものはどんどんと外して考えるというのがひとつのポイントです。



⇑ 微分の目的は正負を知ること。微分の正負はグラフをかいて考えると分かりやすい。

$-x^2-2x$ のグラフは上図のようになります。x 軸より下側にあるところは負、上側にあるところは正ということを考えると、$x<0,\ 2<x$ で $f'(x)<0$ となり、$0<x<2$ で $f'(x)>0$ となります。

これを踏まえて増減表をかくと、次のようになります。

x		-2		0	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	$f(-2)$	↗	$\frac{\pi}{4}$	↘

増減表は、上図のようになりました ($f(0)=\frac{\pi}{4}$ は計算しました)。これより、最大値は $x=0$ のときかな？ということが分かります。でも、$x=0$ で最大値をとるには、$x\to-\infty$ のときを考えないといけません。増減表からは、$x\to-\infty$ のときの値が、$f(0)=\frac{\pi}{4}$ よりも大きくなる可能性がある。どっちが大きいか調べないといけない

$f(x)=\displaystyle\int_x^{2x+1}\frac{1}{t^2+1}\,dt$ ですが、今回はインテグラルの中身が常に正です。ということは、(1) で説明をしたように積分区間の x と $x+1$ を比べてみて、$x<2x+1$ のときは $f(x)>0$ となり、$x>2x+1$ のときは $f(x)<0$ となります。

$x>2x+1$ を解くと、$x<-1$ です。$x<-1$ のときは、負の値となります。このことと増減表により、$f(x)$ の最大値は存在して、$x=2$ のとき、最大値 $\frac{\pi}{4}$ となります。それでは、解答に進みます。

【(3)の解答】

(2)より、$f'(x) = \dfrac{-x^2 - 2x}{(x^2 + 2x + 1)(x^2 + 1)}$

増減表をかくと

x		-2		0	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	$f(-2)$	$\nearrow$	$f(0)$	$\searrow$

$f(x) = \displaystyle\int_x^{2x+1} \frac{1}{t^2+1}\,dt$ で常に $\dfrac{1}{t^2+1} > 0$ ということを考え $x < 2x + 1$ つまり $x > -1$ では $f(x) > 0$ となり、$x > 2x + 1$ つまり $x < -1$ では $f(x) < 0$ となる。

このことと、増減表より $f(x)$ は $x = 0$ のとき最大値をもつ。

$f(0) = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t^2+1}\,dt$

ここで$t = \tan\theta$とする

$= \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} 1\,d\theta$

$= \Big[\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}$

$= \dfrac{\pi}{4}$

以上より、$f(x)$ は最大値をもち、$x = 0$ のとき最大値 $\dfrac{\pi}{4}$ をとる

今回の問題はどうだったでしょうか。微分の公式さえ覚えていたらそれほど難しい問題ではないと思います。

このように、高校数学では数学の能力というよりも知っているかどうかということが重

要になることが多いです。まずは覚えないといけない定理、公式をひとつずつ覚えていってください。

河見賢司

高校数学の勉強法
http://www.hmg-gen.com/

感想はこちらまでメールをください（何か言ってもらえると嬉しいです）
magdai@hmg-gen.com