問題

$C: y = x^2$ がある。C 上に 2 点 $A(\alpha, \alpha^2)$, $B(\beta, \beta^2)$ がある。ただし、$\alpha < \beta$。このとき、以下の問いに答えよ

(1) 点 A における C の接線を求めよ

(2) 点 B における C の接線を求めよ

(3) (1), (2) で求めた 2 接線の交点を求めよ

(4) C と 2 接線によって囲まれる部分の面積を求めよ

【解説】

数学 II の積分の問題で $y = x^2$ に関する問題です。$y = x^2$ に関する問題とは、実は $y = x^2$ にはいろいろな性質があり、それらをつかった問題がよく出題されます。

今回話す内容もそのうちのひとつです。この問題は、よく出てくるので公式として覚えておかないといけない内容です。計算して導けるのはもちろんのこと、結果自体も覚えてしまってください。

【(1) の解答】

$y = x^2$　$y' = 2x$ より、点 A における C の接線は

$$y - \alpha^2 = 2\alpha(x - \alpha)$$

$$y = 2\alpha x - \alpha^2$$

【(2) の解答】

(1) より、$y = 2\beta x - \beta^2$ ◀ (1) と計算式はまったく同じ。α が β に変わっただけ

【(3) の解答】

$y = 2\alpha x - \alpha^2$ と $y = 2\beta x - \beta^2$ より y を消去して

$$2\alpha x - \alpha^2 = 2\beta x - \beta^2$$

$$2(\alpha - \beta)x = \alpha^2 - \beta^2$$

$$2(\alpha - \beta)x = (\alpha + \beta)(\alpha - \beta)$$

$\alpha < \beta$ より、$\alpha - \beta \neq 0$ より両辺を $\alpha - \beta$ で割ると ◀(注) を見よ

$$2x = \alpha + \beta$$

$$x = \frac{\alpha + \beta}{2}$$

$y = 2\alpha x - \alpha^2$ に $x = \dfrac{\alpha+\beta}{2}$ を代入すると

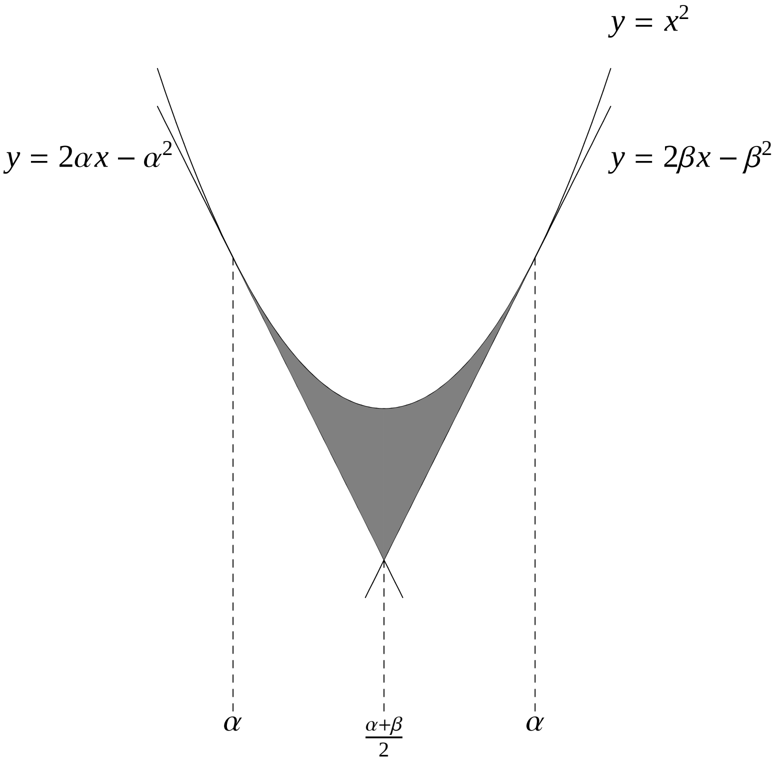
$$\begin{aligned} y &= 2\alpha \cdot \frac{\alpha+\beta}{2} - \alpha^2 \\ &= \alpha^2 + \alpha\beta - \alpha^2 \\ &= \alpha\beta \end{aligned}$$

よって、求める 2 接線の交点は $\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2},\ \alpha\beta\right)$ となる。

(注) 今回は両辺を $\alpha-\beta$ で割ったが、両辺を変数でわるときは、必ずその変数が 0 になるかどうかということを確認しておかないといけない。0 で割るということは出来ないので、変数が 0 になる場合があるときはしっかりと場合分けをしないといけない。

両辺を変数で割るときは、必ず 0 になるかどうかということを確認するようにしておいてください。

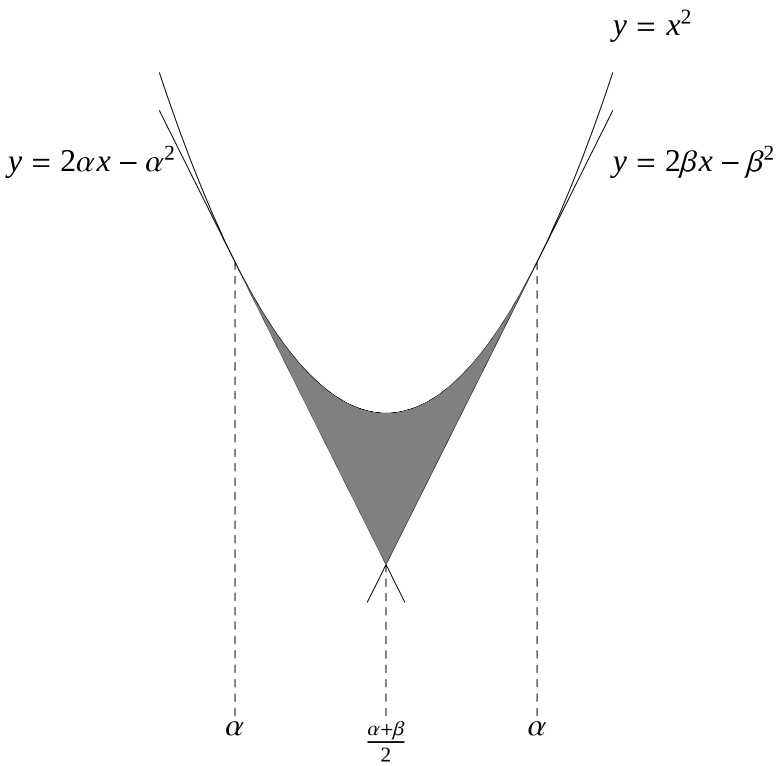
【(4) の解答】



求める部分の面積を S とする。

$$
\begin{aligned}
S &= \int_{\alpha}^{\frac{\alpha+\beta}{2}} \left\{x^2-(2\alpha x-\alpha^2)\right\}dx+\int_{\frac{\alpha+\beta}{2}}^{\beta}\left\{x^2-(2\beta-\beta^2)\right\}dx \\
&= \int_{\alpha}^{\frac{\alpha+\beta}{2}} (x^2-2\alpha x+\alpha^2)\,dx+\int_{\frac{\alpha+\beta}{2}}^{\beta}(x^2-2\beta x+\beta^2)\,dx \\
&= \int_{\alpha}^{\frac{\alpha+\beta}{2}} (x-\alpha)^2\,dx+\int_{\frac{\alpha+\beta}{2}}^{\beta}(x-\beta)^2\,dx \\
&= \left[\frac{1}{3}(x-\alpha)^3\right]_{\alpha}^{\frac{\alpha+\beta}{2}}+\left[\frac{1}{3}(x-\beta)^3\right]_{\frac{\alpha+\beta}{2}}^{\beta} \\
&= \frac{1}{3}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}-\alpha\right)^3-\frac{1}{3}(\alpha-\alpha)^3+\frac{1}{3}(\beta-\beta)^3-\frac{1}{3}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}-\beta\right)^3 \\
&= \frac{1}{3}\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right)^3-\frac{1}{3}\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)^3 \\
&= \frac{1}{24}(\beta-\alpha)^3+\frac{1}{24}(\beta-\alpha)^3 \quad \blacktriangleleft\ (\alpha-\beta)^3=-(\beta-\alpha)^3\ \text{を利用} \\
&= \frac{1}{12}(\beta-\alpha)^3 \quad \blacktriangleleft\ \text{これが答え}
\end{aligned}
$$

冒頭にも言いましが、この問題は当然自分で求められないといけませんが、計算結果自体も覚えておいた方がいいです。



$y=x^2$ の性質

上図のように $y=x^2$ の２接線の交点は $\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2},\ \alpha\beta\right)$ である。

また、２接線と $y=x^2$ によって囲まれる部分の面積 S は、$S=\dfrac{1}{12}(\beta-\alpha)^3$ である。

【注】放物線が $y=x^2$ 以外だったらどうなの？と質問を受けることがあります。

その場合、まず交点ですが交点の x 座標はどういった放物線でも $\dfrac{\alpha+\beta}{2}$ になります。

y 座標は、放物線によって変わってきます。$y=ax^2$ のとき、交点の y 座標は $a\alpha\beta$ となります。他の放物線のときは、その場で自分で計算をするようにしてください。

次に、放物線と２接線によって囲まれる部分の面積ですが、これはどういった放物線でも必ず $\dfrac{1}{12}(\beta-\alpha)^3$ になります。

今回のこの問題ですが、本当に有名です。ある意味、受験界では常識と言っていいくらいの有名な性質なんですけど、知っている高校生は意外なほど少ないです。知っているか知らないかで、解く時間がまったく変わってきます。ぜひとも覚えておいてください。

河見賢司

高校数学の勉強法
http://www.hmg-gen.com/

感想はこちらまでメールをください（何か言ってもらえると嬉しいです）
magdai@hmg-gen.com