問題

$$\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)^m(\beta-x)^n\,dx \text{ を求めよ}$$

【解説】

数学 III の積分の問題ですが、「積分漸化式」という問題です。積分漸化式の問題は大学受験でも頻出ですが、解き方が決まっています。まずは、次のことを覚えておいてください。

積分漸化式の解法

積分漸化式の問題では、部分積分をして解いていくことが多い！

積分漸化式の問題では、最初に式変形をすることにより自分で漸化式を作ります。その漸化式の作り方ですが、部分積分をしたら作れるということが多いです。

「**積分漸化式の問題では、最初の式変形に部分積分をすることが多い**」ということを覚えておいてください。それでは、実際に問題を解いていきたいと思います。

まず、$\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)^m(\beta-x)^n\,dx$ ですが、m と n を含んだ式なので $I(m,n)=\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)^m(\beta-x)^n\,dx$ とでも、おくことにします。(注) 別にこうおいた理由は特にないですよ。ただ単にこういうふうに $I(m,n)$ とおいた方が分かりやすいので、こうおいただけです)

で、ここから解いていくんですけど、ここからは最初に書いた通り「**積分漸化式なので、まず部分積分をしてから解いていきます**」

$$\begin{aligned}I(m,n)&=\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)^m(\beta-x)^n\,dx\\&=\int_{\alpha}^{\beta}\left\{\frac{1}{m+1}(x-\alpha)^{m+1}\right\}'(\beta-x)^n\,dx\\&=\left[\frac{1}{m+1}(x-\alpha)^{m+1}(\beta-x)^n\right]_{\alpha}^{\beta}-\int_{\alpha}^{\beta}\frac{1}{m+1}(x-\alpha)^{m+1}\cdot n(\beta-x)^{n-1}(-1)\,dx\end{aligned}$$

◀ 部分積分をした

で、ここからの計算なんですけど、まず左側の $\left[\frac{1}{m+1}(x-\alpha)^{m+1}(\beta-x)^n\right]_{\alpha}^{\beta}$ は、$x=\alpha$ を代入しても、$x=\beta$ を代入しても 0 になってくれるので、値としては 0 になってくれます。

ですから、当然

$$\left[\frac{1}{m+1}(x-\alpha)^{m+1}(\beta-x)^{n}\right]_{\alpha}^{\beta}-\int_{\alpha}^{\beta}\frac{1}{m+1}(x-\alpha)^{m+1}\cdot n(\beta-x)^{n-1}(-1)\,dx$$
$$=0-\int_{\alpha}^{\beta}\frac{1}{m+1}(x-\alpha)^{m+1}\cdot n(\beta-x)^{n-1}(-1)\,dx$$
$$=\frac{n}{m+1}\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)^{m+1}(\beta-x)^{n-1}\,dx$$

上記のようになります。で、ここからなんですけど、

$\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)^{m+1}(\beta-x)^{n-1}\,dx$ は、$I(m+1,\ n-1)$ で表されるっていうの分かるかな？分かる人にとっては簡単だと思うけど、一応説明しておきます。

まず、$I(m,\ n)$っていうのは、$I(m,\ n)=\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)^{m}(\beta-x)^{n}\,dx$ です。$I(m+1,\ n-1)$っていうのは、この $I(m,\ n)$ に m のところを $m+1$ に n のところを $n-1$ に置き換えたものです。置き換えるとは分かりやすく言うと、m に $m+1$ を n に $n+1$ を代入したものとです。

$I(m+1,\ n-1)$ は $I(m,\ n)=\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)^{m}(\beta-x)^{n}\,dx$ の m に $m+1$ を n に $n-1$ を代入したものなので、

$$I(m+1,\ n-1)=\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)^{m+1}(\beta-x)^{n-1}\,dx$$

上記のようになります。

これらのことより、$I(m,\ n)=\frac{n}{m+1}I(m+1,\ n-1)$ という漸化式を導くことができました。

後は、この漸化式を解いていけばいいだけなんですけど、重要なのでもう一度言っておきます。「**積分漸化式では、まず最初に部分積分をすることが多い！**」ということを覚えておいてください。

それでは、求まった漸化式 $I(m,\ n)=\frac{n}{m+1}I(m+1,\ n-1)$ を解くことにします。

で、ここからどうやって解いていくか分かるかな？これ以降は、積分の問題ではなく単なる数列の問題です。こういった漸化式は、積分に限らず数学 III ではよく出題されるのでしっかりと理解しておいてください。それでは、問題に進みたいと思います。

$I(m,\ n) = \dfrac{n}{m+1}\,I(m+1,\ n-1)$ この漸化式を解いていくんですけど、$I(m+1,\ n-1)$ を求めることにします。$I(m+1,\ n-1)$っていうのは、$I(m,\ n) = \dfrac{n}{m+1}\,I(m+1,\ n-1)$ の m のところに $m+1$ を n のところに $n-1$ を代入したものなんだから、$I(m+1,\ n-1) = \dfrac{n-1}{m+2}\,I(m+2,\ n-2)$ となります。

よって、

$$\begin{aligned} I(m,\ n) &= \frac{n}{m+1}\,I(m+1,\ n-1) \\ &= \frac{n}{m+1}\cdot\frac{n-1}{m+2}\,I(m+2,\ n-2) \end{aligned}$$

◀ $I(m+1,\ n-1) = \dfrac{n-1}{m+2}\,I(m+2,\ n-2)$ を代入した

ここから、同じ作業をどんどんと繰り返します。次に、$I(m+2,\ n-2) = \dfrac{n-2}{m+3}\,I(m+3,\ n-3)$ を代入すると、与式は以下のようになります。

$$I(m,\ n) = \frac{n}{m+1}\cdot\frac{n-1}{m+2}\cdot\frac{n-2}{m+3}\,I(m+3,\ n-3)$$

これからもどんどんと続けていくんだけど、$I(\bigcirc,\ \bigcirc)$ を見てみたら $I(m+1,\ n-1),\ I(m+2,\ n-2),\ I(m+3,\ n-3)$ と右側の n の方がどんどん小さくなっていってるよね。

この漸化式をどこまで続けるかと言うと、右側が 0 になるまでどんどんと繰り返したいと思います。

$$I(m,\ n) = \frac{n}{m+1}\cdot\frac{n-1}{m+2}\cdot\frac{n-2}{m+3}\cdot\frac{n-3}{m+4}\cdot\frac{n-4}{m+5}\cdots\cdots\frac{\bullet}{\bigcirc}\,I(\blacktriangle,\ 0)$$

繰り返していったら、上のようになります。ここから $\bullet$, $\bigcirc$, $\blacktriangle$ の部分にどんな数字が入るか考えていきたいと思います。(注) ここからは漸化式の解き方で重要な部分です。漸化式を解くには、絶対に身につけておかないといけない解き方です。しっかりと理解しておいてください。

まずは、$\blacktriangle$ の部分からです。この部分がどのように変化するか考えます。

$$
\begin{aligned}
I(m,n) &= \frac{n}{m+1} I(m+1,\, n-1) \\
&= \frac{n}{m+1}\cdot\frac{n-1}{m+2} I(m+2,\, n-2) \\
&= \frac{n}{m+1}\cdot\frac{n-1}{m+2}\cdot\frac{n-2}{m+3} I(m+3,\, n-3)
\end{aligned}
$$

上の赤い部分と青い部分に着目して欲しいのですが、$m+1$ のときは $n-1$、$m+2$ のときは $n-2$、$m+3$ のときは $n-3$ となっています。ですから、$m+l$ のとき $n-l$ です。逆から言えば、$n-l$ のとき、$m+l$ です。

で、今回は $I(\blacktriangle, 0)$ と右側を 0 にまで変形します。右側が 0 となるときは $n-n$ のときです。このことより、$\blacktriangle$ の部分は $m+n$ となります。

では、次に

$$
I(m,n) = \frac{n}{m+1}\cdot\frac{n-1}{m+2}\cdot\frac{n-2}{m+3}\cdot\frac{n-3}{m+4}\cdot\frac{n-4}{m+5}\cdots\cdots\frac{\bullet}{\bigcirc} I(m+n,\, 0)
$$

$\bullet$ と $\bigcirc$ を考えていきたいと思います。

$$
\begin{aligned}
I(m,n) &= \frac{n}{m+1} I(m+1,\, n-1) \\
&= \frac{n}{m+1}\cdot\frac{n-1}{m+2} I(m+2,\, n-2) \\
&= \frac{n}{m+1}\cdot\frac{n-1}{m+2}\cdot\frac{n-2}{m+3} I(m+3,\, n-3)
\end{aligned}
$$

まず、青文字の方ですが I の中身が $n-1$ のとき一番右側の分子は n、$n-2$ のときは $n-1$、$n-3$ のときは $n-2$ です。つまり、I の中身より 1 だけ大きい数です。

ということは、$I(m+n,\, 0)$ のときは 0 より 1 だけ大きいので、一番右側の分子は 1 となります。

次に、赤文字の方ですが I の中身が $m+1$ のとき一番右側の分母は $m+1$、$m+2$ のときは $m+2$、$m+3$ のときは $m+3$ つまり、I の中身と同じです。

ということは、$I(m+n,\, 0)$ のときは $m+n$ と同じなので、一番右側の分母は $m+n$ となります。これらのことより、次のようになります。

$$I(m,\ n) = \frac{n}{m+1}\cdot\frac{n-1}{m+2}\cdot\frac{n-2}{m+3}\cdot\frac{n-3}{m+4}\cdot\frac{n-4}{m+5}\cdots\cdots\frac{1}{m+n}\,I(m+n,\ 0)$$

後は、上の式を計算すればいいだけなんですけど、まずは

$$\frac{n}{m+1}\cdot\frac{n-1}{m+2}\cdot\frac{n-2}{m+3}\cdot\frac{n-3}{m+4}\cdot\frac{n-4}{m+5}\cdots\cdots\frac{1}{m+n}$$

から考えたいと思います。

まず分子ですが、$n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdots 1$ ですが、これは当然 $n!$ です。$n!$ となることが分からないという人は左からではなく、右からかけていってみてください。そうすれば $n!$ 分かると思います。

で、次に分子ですが、$(m+1)\cdot(m+2)\cdot(m+3)\cdots(m+n)$ です。これですが、仮に

$1\cdot 2\cdots m\cdot(m+1)\cdot(m+2)\cdot(m+3)\cdots(m+n)$ なら、$(m+n)!$ とすることができます。でも、赤の部分は当然勝手にかけてはいけません。分母にかけるだけでなく、分子にも同じ数をかけたらＯＫです。

ちなみに、$1\cdot 2\cdots m = m!$ です。

これらのことより、

$$\frac{n}{m+1}\cdot\frac{n-1}{m+2}\cdot\frac{n-2}{m+3}\cdot\frac{n-3}{m+4}\cdot\frac{n-4}{m+5}\cdots\cdots\frac{1}{m+n}$$
$$=\frac{m!\,n!}{(m+n)!}$$

上記のようになります。

最後に $I(m{+}n,\ 0)$ を計算をしないといけません。これは、もともとの式 $\int_\alpha^\beta (x-\alpha)^m(\beta-x)^n\,dx$ の m に $m+n$ を n に 0 を代入したものなので、

$$\begin{aligned} I(m+n,\ 0) &= \int_\alpha^\beta (x-\alpha)^{m+n}(\beta-x)^0\,dx \\ &= \int_\alpha^\beta (x-\alpha)^{m+n}\,dx \\ &= \left[\frac{1}{m+n+1}(x-\alpha)^{m+n+1}\right]_\alpha^\beta \\ &= \frac{1}{m+n+1}(\beta-\alpha)^{m+n+1} \end{aligned}$$

以上のことより、

$$\begin{aligned} I(m, n) &= \frac{m!\,n!}{(m+n)!} \cdot \frac{1}{m+n+1}(\beta-\alpha)^{m+n+1} \\ &= \frac{m!\,n!}{(m+n+1)!}(\beta-\alpha)^{m+n+1} \end{aligned}$$

上記のようになります。少し長かったですが、これが答えです。数学 II の積分の問題で直線と放物線によって囲まれるう部分の面積は、$\frac{a}{6}(\beta-\alpha)^3$ になるということは知っている人も多いと思いますが、この公式は実は今回説明した式から簡単に導くことができます。

上記の式さえ暗記していると、直線と放物線だけでなく３次関数とその接線によって囲まれる部分の面積や、放物線と放物線とによって囲まれる部分の面積なんかも簡単に解くことができます。

重要な公式なんですけど、意外に知らない人が多いです。しっかりと覚えておいてください。

河見賢司

高校数学の勉強法
http://www.hmg-gen.com/

感想はこちらまでメールをください（何か言ってもらえると嬉しいです）
magdai@hmg-gen.com