問題

次の問いに答えよ

(1) 関数 $f(x)$, $g(x)$ を

$$f(x) = |x^2 - 4x + 3|$$
$$g(x) = ax \ (a > 0)$$

とおく。曲線 $y = f(x)$ と直線 $y = g(x)$ が共有点を４つもつような定数 a の値の範囲を求めよ。

(2) 次の連立不等式の表す領域を図示し、その領域の面積を求めよ。

$$\begin{cases} y \geqq |x^2 - 4x + 3| \\ y \leqq x \end{cases}$$

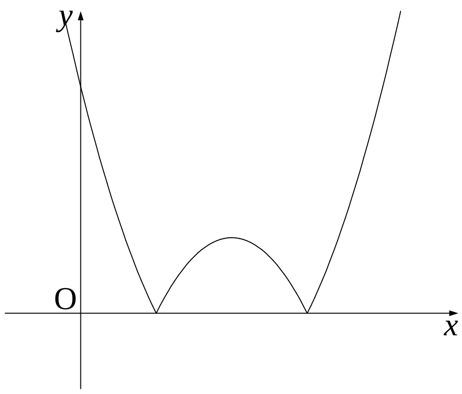
【解説】

お茶の水女子大学の２００９年の過去問で、文系、理系共通に出題された問題です。

単元としては、数学 II の微分積分の問題です。「放物線と直線の面積が囲む面積」の問題で受験では、本当に頻出の問題です。お茶の水女子大学レベルを考えると基本的な問題ですが、今現在高校２年生の人は少し難しく感じるかもしれません。

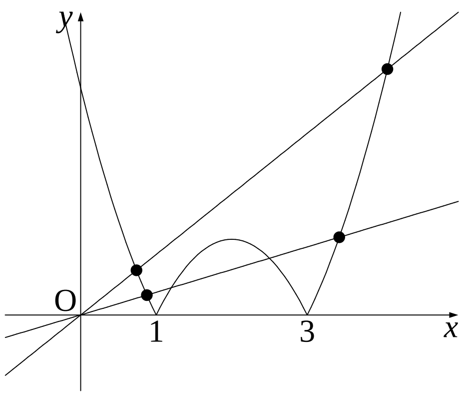
実際の大学受験では、これ以上の問題が出題されます。このくらいの問題は、さくさく解けるようになっておいてください。それでは、問題に進みます。

【(1) の解説】
まず、$y = |x^2 - 4x + 3|$ のグラフをかくと、以下のようになります。



今回は、$y = ax$ $(a > 0)$ と４交点をもつような a の値の範囲を求めよ、といった問題です。

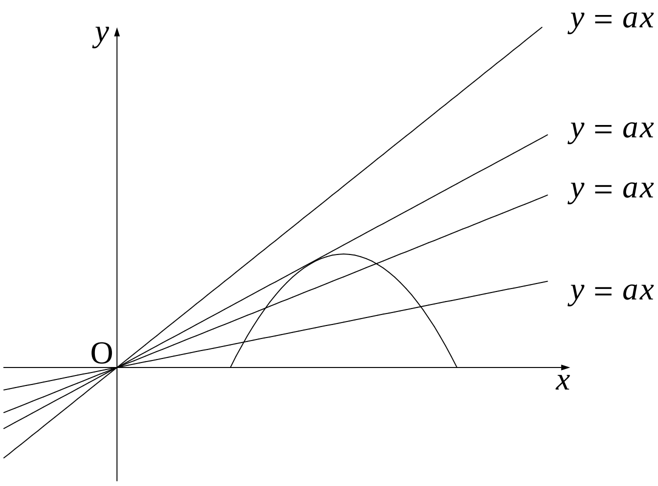
$y = ax$っていうのは、原点を通る直線です。そして、今回は $a > 0$ という値の範囲が与えられているので、$0 < x < 1$ と $3 < x$ で絶対に２つ交点をもちます。



上図のように、$y = ax$ で傾きが正のときは a の値がどういったときにでも必ず交点を２つ持ってくれます。

今回は、「交点が４つとなるような a の値の範囲を求めよ」です。もうすでに、交点を２つ持ってくれているので、あと２つ交点をもてばＯＫです。

ここからは、分かると思いますが、後は $1 < x < 3$ の部分で交点を２つ持ってくれたらＯＫとなります。$1 < x < 3$ の部分は、$y = -x^2 + 4x - 3$ です。これと交点を $1 < x < 3$ で２つもてばＯＫです。どんなときかな？と思うので、少しグラフをかいて考えることとします。



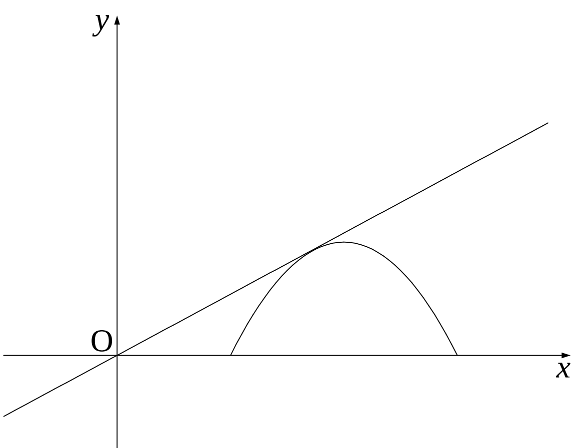
とりあえず、$y = ax$ をいろいろとかきました。これが、$y = -x^2 + 4x - 3$ と２つの交点をもてばいいんだけど、それはもう分かるよね。

上図より、接するときより傾きが小さいつまり、a の値が小さいときに２つの交点を持ってくれます。今回は、$a > 0$ という条件があるので、接するときより a の値が小さい時は必ず２つの交点をもってくれます。

それでは、解答に進みたいと思います。

【解答】
$a > 0$ のとき、$y = |x^2 - 4x + 3|$ と $y = ax$ は、$0 < x < 1$ と $3 < x$ で交点をひとつずつもつ。

よって、４つの交点をもつときは $y = |x^2 - 4x + 3|$ と $y = ax$ が $1 < x < 3$ で交点を２つもてばよい。



$y = ax$ が $y = -x^2 + 4x - 3$ と接するときより a の値が小さいとき、

$1 < x < 3$ で $y = |x^2 - 4x + 3|$ と $y = ax$ が 2 交点をもつ。以下、$y = -x^2 + 4x - 3$ と $y = ax$ が接するときの a の値を求める。

$$-x^2 + 4x - 3 = ax$$

$$x^2 + (a - 4)x + 3 = 0$$

この判別式を D とする。接するときは $D = 0$ となればよいので

$$D = (a - 4)^2 - 12 = 0$$

$$(a - 4)^2 = 12$$ ◀ 展開をするよりも、こうした方が楽

$$a - 4 = \pm 2\sqrt{3}$$

$$a = 4 \pm 2\sqrt{3}$$

$a = 4 - 2\sqrt{3}$ のとき、$x^2 + (a - 4)x + 3 = 0$ に $a = 4 - 2\sqrt{3}$ を代入すると

$$x^2 - 2\sqrt{3}X + \sqrt{3} = 0$$

$$(x - \sqrt{3}) = 0$$

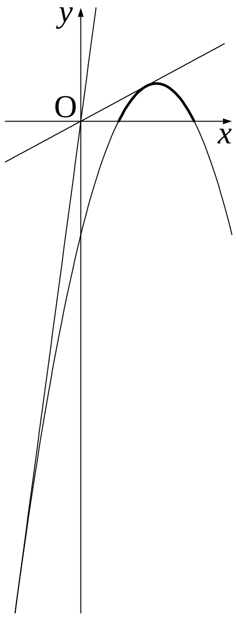
$$x = \sqrt{3}$$

交点の x 座標は、$x = \sqrt{3}$ で $1 < x < 3$ を満たす

よって、$a - 4 - 2\sqrt{3}$ のとき、$1 < x < 3$ で接点をもつ。

以上より、$y = ax$ が $y = f(x)$ が 4 個の共有点をもつような a の値の範囲は、$0 < a < 4 - 2\sqrt{3}$ となる。

(注) $y = ax$ と $y = x^2 - 4x + 3$ が接するのは当然 2 つあります。以下の図を見てもらえば分かると思います。今回はより丁寧にするために、わざわざ接点まで求めましたがこのくらいなら明らかとしてもらってもいいかもしれません。ただ、減点されるのが怖いのでより丁寧に書いた方がよいと思います。

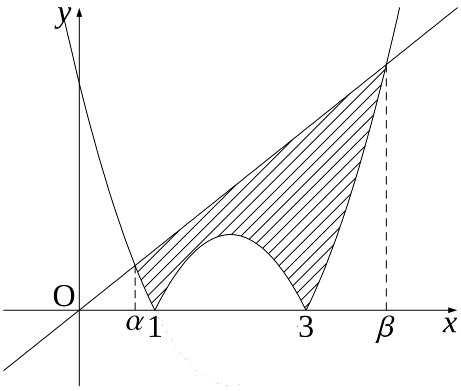


⇑少し見にくいですけど、接線は上記のように２通りあります。

【(2) の解説】
まず、今回の問題は $y = x$ と $y = |x^2 - 4x + 3|$ の位置関係を調べないといけません。この位置関係を調べるには、当然 (1) の結果を使います。今回の場合分かりやすかったので、ほとんどの人が気づけたと思いますが、**大学受験の問題では** (1),(2) **となっていたら前問の結果を使って解いていくことが多い！**ということを覚えておいてください。

これは、本当に本当に重要な事柄ですので、絶対に頭に叩き込んでおくようにしてください。

(1) を考えて、図示すると次にようになります。$y = x$ と $y = x^2 - 4x + 3$ との交点を $\alpha, \beta\,(\alpha < \beta)$ とおいておきます。(注) 今回は α と β の具体的な値を求めることもできますが、ルートが入っていて少し汚いです。積分区間が汚いときは、こういうふうに文字でおいて計算しきってから、最後に代入をした方が計算が楽になることが多いです。覚えておいてください。



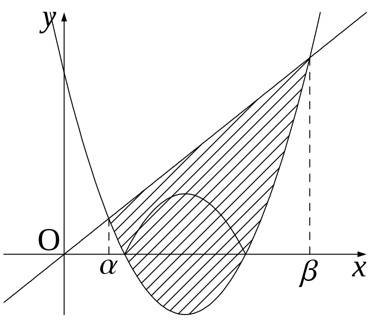
で、ここからの面積ですが、「この問題を解いてみて … 」というと次のように解く人が多いです。

$$\int_1^{\alpha}\left\{x-(x^2-4x+3)\right\}dx+\int_1^{3}\left\{x-(-x^2+4x-3)\right\}dx+\int_3^{\beta}\left\{x-(x^2-4x+3)\right\}dx$$

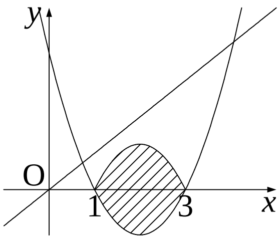
もちろん、上記のように計算をしても求められないことはないけど、少し面倒です。**積分の面積では、計算の仕方によって計算量がだいぶ変わってきます。単純に上から下をひく解き方ではなく、もっと簡単な求め方はないかな？と考えるクセをつけておくようにしてください。**

で、このことを頭にいれて考えるんだけど、どうしようかな？直線と放物線によって囲まれる部分の面積だったら $\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$ で求められるっていうのは大丈夫だよね。

そこで、今回もなんとかして、この形を利用できないかな？と思い、考えていきます。

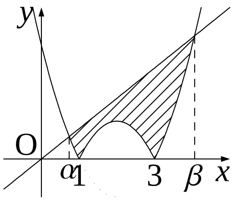


上図の面積なら簡単に求めることができます。で、求める部分はこの部分の面積から下図の斜線部の面積を引いたらいいんじゃない？そうすると、求める部分の面積になるよね。



で、上図斜線部の面積は $y \geqq 0$ の部分と、$y \leqq 0$ の部分の面積は等しく $\frac{1}{6}(3-1)^3$ です。
それでは、これのことを踏まえて問題に進みます。

【解答】
$y=x$ と $y=|x^2-4x+3|$ の位置関係は、(1) より、以下のようになる。



求める斜線部の面積は、$y=x$ と $y=x^2-4x+3$ で囲まれる部分の面積から $y=x^2-4x+3$ と x 軸によって囲まれる部分の面積を 2 倍したものを引けば求めることができる。

まず、$y=x$ と $y=x^2-4x+3$ で囲まれる部分の面積 S_1 を求める。$y=x^2-4x+3$ と $y=x$ との交点の x 座標をを $\alpha, \beta\ (\alpha<\beta)$ とする。$x^2-4x+3=x$ より、$x^2-5x+3=0$

解と係数の関係より $\alpha+\beta=5, \alpha\beta=3$

$$
\begin{aligned}
S_1 &= \int_\alpha^\beta \left\{x-(x^2-4x+3)\right\}dx \\
&= \int_\alpha^\beta (x-\alpha)(\beta-x)\,dx \\
&= \frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3 \\
&= \frac{1}{6}\left\{(\beta-\alpha)^2\right\}^{\frac{3}{2}} \quad \blacktriangleleft \text{よく使う式変形。(注) を見よ} \\
&= \frac{1}{6}\left\{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta\right\} \\
&= \frac{1}{6}(5^2-4\cdot 3)^{\frac{3}{2}} \quad \blacktriangleleft\ \alpha+\beta=5,\ \alpha\beta=3\ \text{を代入した} \\
&= \frac{1}{6}\cdot 13^{\frac{3}{2}} \\
&= \frac{13\sqrt{13}}{6}
\end{aligned}
$$

(注)

$(\beta-\alpha)^3 = \left\{(\beta-\alpha)^2\right\}^{\frac{3}{2}}$ っていうのが成立していることは指数法則 $(a^m)^n = a^{mn}$ より、明らかだよね。

この $(\beta-\alpha)^3$ を展開したらすごく汚い式になって計算が難しいけど、$(\beta-\alpha)^2$ だったら対称式の知識を使って簡単に計算できるよね？意外によくでる式変形なのでよく覚えておいてください。

次に、$y = x^2 - 4x + 3$ と x 軸によって囲まれる部分の面積を S_2 とする。

$$\begin{aligned} S_2 &= \int_1^3 -(x^2 - 4x + 3)\,dx \\ &= \int_1^3 (x-1)(3-x)\,dx \\ &= \frac{1}{6}(3-1)^2 \\ &= \frac{4}{3} \end{aligned}$$

以上より、$y = |x^2 - 4x + 3|$ と $y = x$ によって囲まれる部分の面積を S とすると、

$$\begin{aligned} S &= S_1 - 2 \times S_1 \text{ より} \\ &= \frac{13\sqrt{13}}{6} - 2 \cdot \frac{4}{3} \\ &= \frac{13\sqrt{13}}{6} - \frac{8}{3} \end{aligned}$$

◀ これが答え

今回の問題はどうだったでしょうか？高校２年生の人にとっては少し難しかったかもしれません。ただ、この問題は受験レベルとしては本当に基本的な問題です。このくらいのレベルをサクサクと解けるようになっておいてください。

河見賢司

高校数学の勉強法
http://www.hmg-gen.com/

感想はこちらまでメールをください（何か言ってもらえると嬉しいです）
magdai@hmg-gen.com