問題

数字１が書かれた玉が２つ、数字２，３，４，５が書かれた玉が各１つずつ、合計６つの玉が袋に入っている。この袋から玉を任意に１つ取り出し、玉に書かれた数字を控えてから袋に戻す。この作業を合計３回行い、３つの数字を選ぶ。以下の問いに答えよ。

(1) 選んだ数字を３辺の長さとする正三角形が描ける確率を求めよ。

(2) 選んだ数字を３辺の長さとする二等辺三角形が描ける確率を求めよ。

(3) 選んだ数字を３辺の長さとする三角形が描ける確率を求めよ。

【解説】
お茶の水女子大学の２００９年の過去問で、理学部数学科に出題された問題です。お茶の水女子大学レベルからすれば、本当に基本的な問題です。そうは言っても、受験という限られた時間で問題を解かないといけないということを考えると、それほど簡単ではないかもしれません。

今回の問題でもそうですが、場合の数、確率では数え上げる時は本当に丁寧に数えるようにしておいてください。ひとつでも数え落としがあると、当然ですが答えは違ってきます。

こういった数え上げの問題は、問題を解いた後「本当にこれでいいのかな？」ともう一度見直しておいた方がミスが少ないと思います。それでは、問題に進みます。

【(1) の解説】
これは、簡単です。正三角形となるのは、３辺とも長さが等しいときです。
ですから、$(1,1,1)$, $(2,2,2)$, $(3,3,3)$, $(4,4,4)$ $(5,5,5)$, $(6,6,6)$ の６種類ありますが、１の玉だけは２個あるので、計算が違ってきます。当たり前と言えば当たり前なんですが、実際の受験ではこういったことを見落とすことが多いです。気をつけてください。

【(１) の解答】
３つの数字がすべて同じになる確率を求めればよい。

(ｉ) ３つとも１のとき

$$\left(\frac{2}{6}\right)^3 = \frac{8}{216}$$ ◀ 後で計算をすることも考え通分しない

(ii) 3つとも1以外の数のとき

$$4 \times \left(\frac{1}{6}\right)^3 = \frac{4}{216}$$

(i), (ii) より $\frac{8}{216} + \frac{4}{216} = \frac{12}{216} = \frac{1}{18}$ ◀ これが答え

【(2) の解説】

この問題に進む前にまずは三角形が成立する条件を覚えてください。

三角形ができるためには、どの2辺を加えたものでも、残る1辺の大きさより大きいということが必要です。

3辺を a, b, c とすると、$a+b>c$ かつ $b+c>a$ かつ $c+a>b$ が必要です。この3つを a について整理すると、$|b-c|<a<b+c$ となります。

特に、最大辺が a と分かっているときは、$|b-c|<a$ は必ず成立します。よって、三角形の成立条件は $b+c>a$ だけで十分です。この最大辺を使うものが意外によくでてきます。最大辺が分かるときも $|b-c|<a<b+c$ で解こうとする人がたまにいますが、この式は絶対値が含まれていて面倒です。「三角形の成立条件の問題では、最大辺はないかな？」と考えるようにしておいてください。

三角形の成立条件

3辺 a, b, c とする三角形が成立する条件は
$|b-c|<a<b+c$ である。

特に、最大辺が a と分かっているときの成立条件は
$b+c>a$ である。

今回の問題もこれを使って解いていくんですけど、まずちょっと忘れやすいんですけど2等辺三角形というのは正三角形も含みます。正三角形は (1) で求めているので、正三角形以外の2等辺三角形を考えていきます。

それでは、これからひとつずつ考えていきます。

まず、1を2等辺とする三角形を考えます。これは少し考えると分かりますが、こういった三角形は存在しません。(1, 1, 2) の組み合わせのとき、先ほどの三角形の成立条件より

不成立です。

次に、2 を 2 等辺とする三角形を考えます。これは先程の三角形の成立条件を考えると $(2,2,3)$, $(2,2,1)$ の 2 組が存在します。後は、この作業をどんどんとやっていくだけです。どんどんとやっていくだけなのですが、数え落としをしやすいので、本当に気をつけて丁寧に考えるようにしておいてください。それでは、解答に進みます。

【(2) の解答】

２等辺三角形となるのは、正三角形の場合と２辺のみが等しい場合の２通り考えられる。

正三角形となる確率は (1) より $\frac{1}{18}$

次に、２辺のみが等しい場合を考える。２辺のみが等しくなるのは次の組み合わせが考えられる。

$(2,2,1)$, $(2,2,3)$, $(3,3,1)$, $(3,3,2)$, $(3,3,4)$, $(3,3,5)$, $(4,4,1)$, $(4,4,2)$, $(4,4,3)$, $(4,4,5)$, $(5,5,1)$, $(5,5,2)$, $(5,5,3)$, $(5,5,4)$

この中で１を含むものは４通り、１を含まないものは１０通り

⇑ １だけは２個あるので、１を含むか含まないかで当然計算の仕方が変わってきます。

１を含むときの確率は、${}_3C_2 \times \left(\frac{1}{6}\right)^2 \times \frac{2}{6} = \frac{6}{216}$

１を含むものは４通りあるので、確率は $4 \times \frac{6}{216} = \frac{24}{216}$

次に、１を含まないときの確率は、${}_3C_1 \times \left(\frac{1}{6}\right)^2 \times \frac{1}{6} = \frac{3}{216}$

１を含まないものは１０通りあるので、確率は $10 \times \frac{3}{216} = \frac{30}{216}$

よって、２辺のみが等しい２等辺三角形になる確率は $\frac{24}{216} + \frac{30}{216} = \frac{54}{216} = \frac{1}{4}$

以上より、２等辺三角形となる確率は $\frac{1}{18} + \frac{1}{4} = \frac{11}{36}$ ◀ これが答え

【(3) の解説】
三角形となるのを直接求めていってもいいですが、(1),(2) で正三角形や２等辺三角形を求めているので、これを利用して解いていくこととします。余談ですけど、「数学では前問の結果をヒントにしたら、利用して解いていく」ということが本当に多いですよ。

それでは、問題に進みます。三角形となるのは、３辺すべてが等しい、２辺のみが等しい、すべてバラバラの３パターンが考えられます。で、すべてがバラバラとなるのはどんなときがあるかな？と考えていくんですけど、これは最大辺を決めて考えていきます。

まず、最大辺が５のとき、$(5,4,3)$, $(5,4,2)$ の２通りが考えられます。どういうふうに考えたのかと言うと先ほどの三角形の成立条件です。最大辺が分かっているとき、残りの２辺をを足したものが最大辺より大きくなってくれたらＯＫです。こういうふうに考えると上記の２パターンしかありません。

次に、最大辺が４のとき、$(4,3,2)$ の１通りです。そして、最大辺が３以下のとき、やってもらえば分かると思いますが、これを満たす三角形は存在しません。それでは、解答に進みます。

【(3) の解答】
三角形は、２等辺三角形となる場合か、３辺ともすべて違うときの２通りが考えられる。

２等辺三角形となるのは、(2) より $\dfrac{11}{36}$

次に、3 辺ともすべて違うときを考える。この場合の組み合わせは $(5,4,3)$, $(5,4,2)$, $(4,3,2)$ の３通り

いずれの場合も確率は等しく $3!\times\left(\dfrac{1}{6}\right)^3=\dfrac{6}{216}$ より、３辺が違うときの確率は $3\times\dfrac{6}{216}=\dfrac{1}{12}$ となる。

よって、求める確率は $\dfrac{11}{36}+\dfrac{1}{12}=\dfrac{7}{18}$ ◀ これが答え

今回の問題はどうでしたか？基本的といえば基本的ですが、間違った人も多かったと思います。何度もいいますが、確率は場合の数の問題はどうしても数え落としをしてしまいます。

ですから、本当により丁寧に「あっているか、あっているか」ということを確認しながらといていけばよいと思います。それでは、がんばってください。

河見賢司

高校数学の勉強法
http://www.hmg-gen.com/

感想はこちらまでメールをください（何か言ってもらえると嬉しいです）
magdai@hmg-gen.com