

### 問題

$a > 1$  とする。  $a^2 + a + 1$ ,  $a^2 - 1$ ,  $2a + 1$  の中で最大のものはどれか。

### 【解説】

大小比較に関する問題です。こういった問題は、最初から大小比較をするのではなくまず最初に適当な数を代入して、答えを予想をしてから解いていくということがポイントです。

今回は、 $a > 1$  という範囲が与えられているので  $a = 2$  でも代入してみます。 $a = 2$  を代入するというと、「どうして  $a = 2$  を代入するんですか？」と聞く人が、たまにいます。

別に  $a = 2$  でもなんでもいいんです。でも  $a > 1$  を満たす数の中で一番楽そうなものを代入しただけです。極端な話し  $a = 100$  でもなんでもいいです。でも、小さい方が計算がラクだよ。だから、 $a = 2$  を代入します。

$a = 2$  をそれぞれ代入します。

$$a^2 + a + 1 = 2^2 + 2 + 1 = 7$$

$$a^2 - 1 = 2^2 - 1 = 3$$

$$2a + 1 = 2 \cdot 2 + 1 = 5$$

この計算結果から、最大のものは  $a^2 + a + 1$  かな？と予想できます。

「最大のものは  $a^2 + a + 1$  かな？」と言いました。「 $a^2 + a + 1$  が最大で決定じゃないんですか？」と聞く人がいますが、これは「決定」ではありません。

というのも  $a = 2$  のとき、最大のものは  $a^2 + a + 1$  ですが、 $a$  がその他の値の時にどうなるかわかりません。 $a$  の値の範囲によって、最大となるものが変わってくるかもしれません。

実際の問題では、変わってくることはほとんどありません。と言っても、まったくないわけではありません。必ず注意するようにしておいてください。

で、ここからなんですけど2数の大小比較の仕方を覚えてください。

### 大小比較

$A$  と  $B$  を大小比較するとき、 $A - B$  を計算する。

$A - B$  を計算した結果、 $A - B > 0$  なら  $A > B$  が言えて、 $A - B < 0$  なら  $A < B$  が言える

また、0 より大きいことの証明ですが、次の 2 通りあります。

### 0 以上の証明

(i) 範囲が与えられていないとき、

$(\quad)^2 + (\quad)^2$  のように 2 乗足す 2 乗足すの形で証明する。

(ii) 範囲が与えられているとき、

因数分解を使って示す。例えば  $a > b > c$  という範囲が与えられていて  $(a-b)(a-c)$  というふうに因数分解できたとします。 $a > b > c$  より  $a - b > 0$  かつ  $a - c > 0$  です。

これより、 $(a - b)(a - c) > 0$  となります。

「範囲が与えられている」ときでも、 $(\quad)^2 + (\quad)^2$  を使って示すこともあります。ただ、因数分解を使って示すことの方がだいぶ多いように感じます。それでは、解答に進みたいと思います。

### 【解答】

$a^2 + a + 1$  が最大かな？と予想できたので、 $(a^2 + a + 1) - (a^2 - 1)$  と  $(a^2 + a + 1) - (2a + 1)$  を計算します。

$$(a^2 + a + 1) - (a^2 - 1) = a + 2 > 0 (\because a > 1)$$

$$\text{よって、} a^2 + a + 1 > a^2 - 1$$

$$(a^2 + a + 1) - (2a + 1)$$

$$= a^2 - a$$

$$= a(a - 1) \leftarrow \text{範囲が与えられているときの、大小比較は因数分解できることが多い！}$$

$$> 0 (\because a > 1 \text{ より } a > 0 \text{ かつ } a - 1 > 0)$$

$$\text{よって、} a^2 + a + 1 > 2a + 1$$

以上より、 $a^2 + a + 1$ ,  $a^2 - 1$ ,  $2a + 1$  の中で最大のものは  $a^2 + a + 1$  ◀ **これが答え**

これで、今回の問題解説は終わりです。基本的と言え、基本的ですが理解できていない事柄も多くあったと思います。今回話した大小比較は頻出です。しっかりと勉強しておいてください。

河見賢司

高校数学の勉強法

<http://www.hmg-gen.com/>

感想はこちらまでメールをください(何か言ってもらえると嬉しいです)

[magdai@hmg-gen.com](mailto:magdai@hmg-gen.com)

大好評の無料メルマガ

「高校数学の達人・河見賢司のメルマガ」は以下から登録できます。

<http://www.hmg-gen.com/merumagatouroku.html>