

問題

次の問いに答えよ

- (1) $-\pi \leq x \leq \pi$ とする。さらに x が $\cos x - \cos 2x \geq 0$ を満たすとき、 $\sin x + \sqrt{3} \cos x$ のとりうる値の範囲を求めよ。
- (2) x が $\log_2 x + \log_2(6-x) \geq 0$ を満たすとき、 $\log_2(1+x) + \log_2(7-x)$ のとりうる値の範囲を求めよ。

和歌山大学の2010年の過去問で、数学Ⅱの過去問です。国公立大学の受験問題としてはごくごく簡単なものですが、少しややこしいので、数学Ⅱを勉強したての人にとっては難しいかもしれません。

受験って難しい問題がガンガン出題されると思っている人が多いと思うけど、いわゆる難関大学でも問題としては基本的なところが多いです。思考力が必要とされる難問はあまり出題されません。

ですから、特に最初のうちは難しい問題を解くのではなく、まずは基本的な問題を確実に解けるようになっておくことが重要です。それでは、問題に進みたいと思います。

【(1)の解説】

これは、三角関数に関する問題です。 x は「 $-\pi \leq x \leq \pi$ とする。さらに x が $\cos x - \cos 2x \geq 0$ を満たすとき」とかいてあります。まずは、これを満たす x の値の範囲を求めていきます。なお、三角関数の方程式や不等式ですが、単位円で解くと言う人が多いと思います。もちろん、単位円で解いてもらってもかまいませんが、複雑な式になると三角関数のグラフを使った解きの方がはるかに簡単に解くことができます。

「単位円で解けるから、まあいいや」なんて思っている人もいると思いますが、グラフを使って解く三角関数の方程式・不等式をしっかりと理解しておいてください。なお、グラフを使った解き方は <http://www.hmg-gen.com/sankakuhouteisiki.pdf> で解説しています。「グラフでの解き方があいまいだな」と思う人はぜひともこのプリントで勉強をしておいってください。

まず、 $\cos x - \cos 2x \geq 0$ を解きます。これは与式を $\cos x$ のみの式にしてから解いていきます。なお、 $\cos$ の2倍角は $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$, $1 - 2\sin^2 x$, $2\cos^2 x - 1$ の3通りありますが、どれもよく出てくるので3つとも暗記をするようにしてください。

$$\cos x - \cos 2x \geq 0$$

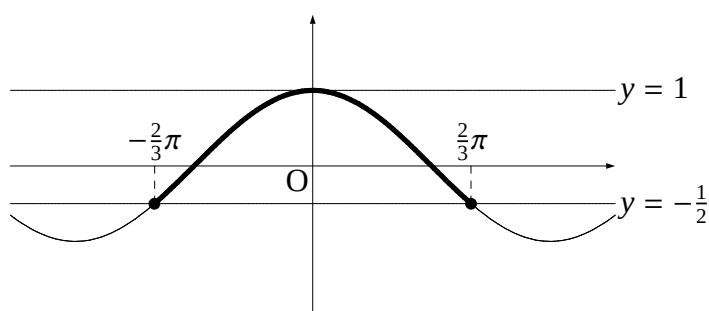
$$\cos x - (2 \cos^2 x - 1) \geq 0 \quad \blacktriangleleft \text{cos の 2 倍角の公式より}$$

$$2 \cos^2 x - \cos x - 1 \leq 0$$

$$(2 \cos x + 1)(\cos x - 1) \leq 0$$

$$-\frac{1}{2} \leq \cos x \leq 1$$

で、ここからこれくらいだったら単位円で考えた方が早いかもしれませんが、せっかくですのでグラフで解いていきたいと思います。



よって、グラフより $-\frac{1}{2} \leq \cos x \leq 1$ は $-\frac{2}{3}\pi \leq x \leq \frac{2}{3}\pi$ となる (注) $-\frac{1}{2} \leq \cos x \leq 1$ とは $y = \cos x$ のグラフが $y = -\frac{1}{2}$ のグラフより上側で、しかも $y = 1$ のグラフよりも下側にあるような部分です (正確には「より」という表現は含まないので不適切です。正確には「以下、以上」です)。このようにグラフでかくと一目瞭然に分かります

ここから、問題は $-\frac{2}{3}\pi \leq x \leq \frac{2}{3}\pi$ における $\sin x + \sqrt{3} \cos x$ の範囲を求める、ということになります。範囲を求めるには、グラフをかいて考える訳ですが、今回は $\sin x + \sqrt{3} \cos x$ というふうに $a \sin x + b \cos x$ という形をしています。こういったときは、三角関数の合成をしてから考えていくことが基本です。

三角関数の合成を知らないという人は、<http://www.hmg-gen.com/sankaku10.pdf> を見てください。合成について解説をしています。

$$\sin x + \sqrt{3} \cos x = 2 \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \quad \blacktriangleleft \text{合成をした}$$

ここからは、範囲を求めるのでグラフをかいて求めます。このくらいなら、置き換えもなしにそのままグラフをかいてもらってもいいのですが、今回は少し置き換えを利用したいと思います。

$2 \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ ですが、係数の2は後から考えるとして、 $\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ はsinの中身が汚いの
で、 $X = x + \frac{\pi}{3}$ とでも置き換えます。 $\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ のグラフはかきにくいですが、 $\sin X$ の
グラフなら簡単にかくことができます。

このように、範囲を求める問題(最大値、最小値問題でも)はグラフをかいて考えること
が基本ですが、文字の置き換えを利用してかきやすいグラフにしてから考えるというこ
とが基本です。

ただ、文字を置き換えた時は、次のことだけは忘れないようにしておいてください。

文字を置き換えたときの注意点

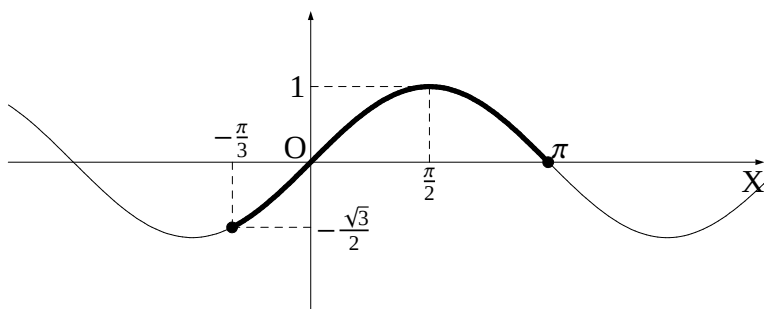
文字を置き換えたときは、必ず置き換えた文字の範囲に注意する。

↑上記の詳しい説明は、<http://www.hmg-gen.com/okikae.pdf>で説明しています。より詳し
く知りたい人はコチラのプリントを見てください。

で、今回は $X = x + \frac{\pi}{3}$ で置き換えたんだから、 X の値の範囲を求めておく必要がありま
す。 x の値の範囲が $-\frac{2}{3}\pi \leq x \leq \frac{2}{3}\pi$ より、

$$\begin{aligned} -\frac{2}{3}\pi &\leq x \leq \frac{2}{3}\pi \\ -\frac{2}{3}\pi + \frac{\pi}{3} &\leq x + \frac{\pi}{3} \leq \frac{2}{3}\pi + \frac{\pi}{3} \quad \blacktriangleleft \text{全ての辺に } \frac{\pi}{3} \text{ を加えた} \\ -\frac{1}{3}\pi &\leq X \leq \pi \quad \blacktriangleleft X \text{ の値の範囲が求まった！} \end{aligned}$$

ここまで来たら、後は $y = \sin X$ の $-\frac{1}{3}\pi \leq X \leq \pi$ の値の範囲を求めればいいだけだから
簡単だよね？グラフをかけば一目瞭然です。



グラフより $-\frac{\sqrt{3}}{2} \leq \sin X \leq 1$ で、求める値の範囲は $-\sqrt{3} \leq 2 \sin X \leq 2$ となり、これが
答えです。

【(2) の解説】

次に(2)の問題です。これも(1)と同じようにまず、 $\log_2 x + \log_2(6-x) \geq 0$ を満たす x の値の範囲を求め、それから $\log_2(1+x) + \log_2(7-x)$ のとりうる値の範囲を求めていきます。

まず、 $\log_2 x + \log_2(6-x) \geq 0$ を満たす x の値の範囲を求める訳ですが、あたり前ですけど、「**log の方程式・不等式はまず真数条件を考える**」ということを忘れないようにしてください。

$\log_2 x + \log_2(6-x) \geq 0$ の真数は x と $6-x$ なので、真数条件は $x > 0$ かつ $6-x > 0$ です。これを解くと $0 < x < 6$ となります。この真数条件は意外に忘れやすいです。「**対数を含んだ式は、まず真数条件を考える**」と頭にいれておくようにしてください。

$$\log_2 x + \log_2(6-x) \geq 0$$

$$\log_2 x(6-x) \geq \log_2 1 \quad \blacktriangleleft \text{log の公式と } 0 = \log_2 1 \text{ より}$$

$$x(6-x) \geq 1 \quad \blacktriangleleft \text{底が1より大きいときは、不等号の向きはそのまま}$$

$$x^2 - 6x + 1 \leq 0$$

$$3 - 2\sqrt{2} \leq x \leq 3 + 2\sqrt{2}$$

あと、真数条件より $0 < x < 6$ がありました。 $\sqrt{2} \approx 1.4$ で計算をすると、 $3 - 2\sqrt{2} \approx 0.2$ で $3 + 2\sqrt{2} = 5.8$ より、 $3 - 2\sqrt{2} \leq x \leq 3 + 2\sqrt{2}$ は真数条件を満たしています。ですから、 $\log_2 x + \log_2(6-x) \geq 0$ は $3 - 2\sqrt{2} \leq x \leq 3 + 2\sqrt{2}$ になります。

ここまでくると、後は $3 - 2\sqrt{2} \leq x \leq 3 + 2\sqrt{2}$ における $\log_2(1+x) + \log_2(7-x)$ の値の範囲を求めればOKです。今回の真数条件は $1+x > 0$ かつ $7-x > 0$ つまり $-1 < x < 7$ ですが、 $3 - 2\sqrt{2} \leq x \leq 3 + 2\sqrt{2}$ は真数条件を満たしています。

$\log_2(1+x) + \log_2(7-x) = \log_2(1+x)(7-x)$ と式変形できます。 $\log_2 f(x)$ は真数の $f(x)$ と大小関係は一致します。ですから、まずは真数の $(1+x)(7-x)$ の値の範囲を求めることにします。

でも、 $(1+x)(7-x)$ の値の範囲だったら簡単だね。これらは、単なる2次関数です。値の範囲を求めるときは、グラフをかきます。2次関数のグラフをかくには平方完成をする必要があります。平方完成をして解いていきたいと思います。

$$\begin{aligned}
 & (1+x)(7-x) \\
 &= -x^2 + 6x + 7 \\
 &= -(x-3)^2 + 16
 \end{aligned}$$

で、ここからグラフをかいてもいいけど、このぐらいだったらグラフをかくまでもないよね。 $3-2\sqrt{2} \leq x \leq 3+2\sqrt{2}$ は、 $y = -(x-3)^2 + 16$ は上に凸な2次関数で軸は $x=3$ なんだから $x=3$ のとき最大値となり、軸から一番遠い $x=3 \pm 2\sqrt{2}$ のときに最大となります。(今回は、 $x=3$ から $x=3-2\sqrt{2}$ と $x=3+2\sqrt{2}$ は距離が同じなので、両方とも同じ値をとります)

これを計算すると $x=3 \pm 2\sqrt{2}$ のとき $-(x-3)^2 + 16$ の値は8になります。

以上より、 $8 \leq -x^2 + 6x + 7 \leq 16$ となります。これより、 $\log_2 8 \leq \log_2(-x^2 + 6x + 7) \leq \log_2 16$ となります。

よって、 $3 \leq \log_2(-x^2 + 6x + 7) \leq 4$ となり、これが答えとなります。

今回の問題はどうかだったでしょうか？大学受験の入試問題としてはごくごく簡単な内容です。これから3年生になる高校2年生の人は、まずはこういった基本レベルの入試問題を確実に解けるようになっておいてください。

河見賢司

高校数学の勉強法

<http://www.hmg-gen.com/>

感想はこちらまでメールをください（何か言ってもらえると嬉しいです）

magdai@hmg-gen.com

大好評の無料メルマガ

「**高校数学の達人・河見賢司のメルマガ**」は以下から登録できます。
<http://www.hmg-gen.com/merumagatouroku.html>