問題

実数 a は $0 \leqq a \leqq 4$ を満たす。このとき、関数 $f(x) = x(x-4),\ g(x) = a(x-4)$ に対して、$\displaystyle\int_0^4 |f(x)-g(x)|\,dx$ を最小にする a の値を求めよ

和歌山大学の２０１０年の過去問で、数学 II の過去問です。積分の中身が絶対値という問題ですが、こういった問題は頻出です。

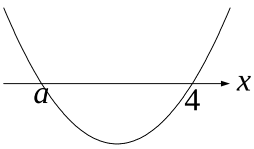
一般的に、積分の中身が絶対値という問題は面倒なものが多いですが、考え方としては丁寧に場合分けをして解いていくだけです。やること自体は簡単ですので、とにかく間違いないように丁寧に問題を解いていくことを心がけて解くようにしてください。

【解説】

絶対値は中身が正のときと、負のときで場合分けが必要です。今回は絶対値の中身は $|f(x)-g(x)|$ なので、まずは絶対値の中身の $f(x)-g(x)$ がどうなっているか考えていきたいと思います。

$$
\begin{aligned}
f(x)-g(x) &= x(x-4) - a(x-4) \\
&= (x-4)(x-a)
\end{aligned}
$$

$0 \leqq a \leqq 4$ と a は 4 以下であることを考慮にいれると、２次関数 $f(x)-g(x)$ は下図のようになります。



$f(x)-g(x)$ は上図のようになります。y 軸よりも上側にあるときは正、下側にあるときは負ということを考えると $f(x)-g(x)$ は $x < a,\ 4 < x$ で正、$a < x < 4$ で正となります。

このように正負を考えるときは、グラフをかいて考えると楽ですよ。

今回の問題は、$\displaystyle\int_0^4 |f(x)-g(x)|\,dx$ と積分区間が $0 \leqq x \leqq 4$ です。ですから、$0 \leqq x \leqq 4$ の値の範囲で考えれば OK です。

$0 < x < a$ で正、$a < x < 4$ で負となることを考えると、

$$\int_0^4 |f(x)-g(x)|\,dx$$
$$=\int_0^a (f(x)-g(x))\,dx+\int_a^4 -(f(x)-g(x))\,dx$$
$$=\int_0^a (x-4)(x-a)\,dx+\int_a^4 -(x-a)(x-4)\,dx$$

上記のようになるので、後はこれを計算していくだけです。一気に計算をしたら面倒なので、$\int_0^a (x-4)(x-a)\,dx$ と $\int_a^4 -(x-a)(x-4)\,dx$ をそれぞれ計算していきたいと思います。

まず、$\int_0^a (x-4)(x-a)\,dx$ の方からですが、これは普通に展開をして計算をしていった方が楽かもしれませんが、次のように因数分解をする方法があります。厳密にいうと数学 III かもしれませんが、数学 II までしか勉強をしない人でも知っておくと便利なので、覚えておいた方がいいと思います。

$(x+a)^n$ の積分

$\int (x+a)^n\,dx = \dfrac{1}{n+1}(x+a)^{n+1}$ である。

普通 $\int (x+1)^3\,dx$ を計算しろ、なんて言われると数学 II までの範囲だったら展開してから積分をしたよね。でも、上記の公式を使うと展開をしなくても計算することができます。

ただし、注意して欲しいことは上記の公式が使えるのは $(x+a)^n$ というように、x の係数が 1 のときだけです。それ以外のときは成立しません。1 以外のときに成立する公式もあることはあるのですが、めったに出てこないので数学 II までしか勉強をしない人は覚える必要はないと思います。

$\int_0^a (x-4)(x-a)\,dx$ を上記の公式を使えるように強引に式変形をします。繰り返しになりますが、この問題なら普通に展開をして解いていった方が速いです。ただ、重要な手法なので、あえて無理やりに公式を使える形で解くという解き方で解いていきたいと思います。

$$\int_0^a (x-4)(x-a)\,dx$$

$$=\int_0^a \left\{(x-a)+(a-4)\right\}(x-a)\,dx$$ ◀ $x-4=(x-a)+(a-4)$ より、強引に $(x-a)$ のみの式にした

$$=\int_0^a \left\{(x-a)^2+(a-4)(x-a)\right\}dx$$

$$=\left[\frac{1}{3}(x-a)^3+\frac{1}{2}(a-4)(x-a)^2\right]_0^a$$ ◀ 先ほど説明した公式を使った

$$=\frac{1}{3}(a-a)^3+\frac{1}{2}(a-4)(a-a)^2-\left\{\frac{1}{3}(0-a)^3+\frac{1}{2}(a-4)(0-a)^2\right\}$$

⇑ 上記のようにすることで、$a-a=0$ になってくれて計算が楽になる

$$=\frac{a^3}{3}-\frac{a^2}{2}(a-4)$$

$$=\frac{a^3}{3}-\frac{a^3}{2}+2a^2$$

$$=-\frac{a^3}{6}+2a^2$$

次に、もうひとつの $\int_a^4 -(x-a)(x-4)\,dx$ の計算です。

これは、$\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(\beta-x)\,dx=\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$ の公式を使うだけです。人によっては、この公式は $\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)\,dx=-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$ と習ったかもしれません。この２つの公式はマイナスを出しただけでまったく同じことを言っているということを理解しておいてください。別にどっちの形を使ってもらってもいいと思いますよ。

$$\int_a^4 -(x-a)(x-4)\,dx$$

$$=\int_a^4 (x-a)(4-x)\,dx$$

$$=\frac{1}{6}(4-a)^3$$ ◀ 公式より

$$=\frac{1}{6}(64-48a+12a^2-a^3)$$

$$=-\frac{1}{6}a^3+2a^2-8a+\frac{32}{3}$$

これらより、

$$\int_0^a (x-4)(x-a)\,dx + \int_a^4 -(x-a)(x-4)\,dx$$
$$= -\frac{a^3}{6} + 2a^2 - \frac{1}{6}a^3 + 2a^2 - 8a + \frac{32}{3}$$
$$= -\frac{a^3}{3} + 4a^2 - 8a + \frac{32}{3}$$

ここからは、単なる3次関数の最大値、最小値問題なので簡単です。それでは、解答に進みたいと思います。

【解答】

$$f(x) - g(x) = x(x-4) - a(x-4)$$
$$= (x-4)(x-a)$$

$I(a) = \int_0^4 |f(x) - g(x)|\,dx$ とする。$a \leqq x \leqq 4$ を考え、

$I(a) = \int_0^a (f(x) - g(x))\,dx + \int_a^4 -(f(x) - g(x))\,dx$ となる。

ここで、

$$\int_0^a (f(x) - g(x))\,dx$$
$$= \int_0^a (x-4)(x-a)\,dx$$
$$= \int_0^a \{(x-a) + (a-4)\}(x-a)\,dx$$ ◀ $x - 4 = (x-a) + (a-4)$ より、強引に $(x-a)$ のみの式にした
$$= \int_0^a \{(x-a)^2 + (a-4)(x-a)\}\,dx$$
$$= \left[\frac{1}{3}(x-a)^3 + \frac{1}{2}(a-4)(x-a)^2\right]_0^a$$ ◀ 先ほど説明した公式を使った
$$= \frac{1}{3}(a-a)^3 + \frac{1}{2}(a-4)(a-a)^2 - \left\{\frac{1}{3}(0-a)^3 + \frac{1}{2}(a-4)(0-a)^2\right\}$$
⇑ 上記のようにすることで、$a - a = 0$ になってくれて計算が楽になる
$$= \frac{a^3}{3} - \frac{a^2}{2}(a-4)$$
$$= \frac{a^3}{3} - \frac{a^3}{2} + 2a^2$$
$$= -\frac{a^3}{6} + 2a^2$$

$$\int_a^4 -(f(x)-g(x))$$
$$=\int_a^4 -(x-a)(x-4)\,dx$$
$$=\int_a^4 (x-a)(4-x)\,dx$$
$=\frac{1}{6}(4-a)^3$ ◀ 公式より
$$=\frac{1}{6}(64-48a+12a^2-a^3)$$
$$=-\frac{1}{6}a^3+2a^2-8a+\frac{32}{3}$$

$$I(a)=-\frac{a^3}{6}+2a^2-\frac{a^3}{6}+2a^2-8a+\frac{32}{3}$$
$$=-\frac{a^3}{3}+4a^2-8a+\frac{32}{3}$$
となる。

$I'(a)=-a^2+8a-8$ となり、$0 \leqq a \leqq 4$ における増減表をかくと以下のようになる。

a	0		$4-2\sqrt{2}$		4
$I'(a)$		$-$	0	$+$	
$I(a)$		↘		↗	

増減表より、$a=4-2\sqrt{2}$ のとき最小となる。

今回の問題はどうだったでしょうか。入試問題としてはごくごく基本的な問題です。まずは、こういった基本的な問題を確実に解けるようになってください。それでは、がんばってください。

河見賢司

高校数学の勉強法
http://www.hmg-gen.com/

感想はこちらまでメールをください（何か言ってもらえると嬉しいです）
magdai@hmg-gen.com

大好評の無料メルマガ
「**高校数学の達人・河見賢司のメルマガ**」は以下から登録できます。
http://www.hmg-gen.com/merumagatouroku.html