問題

a, b を正の定数とし，長さ $a+b$ の線分 AB と，線分 AB を $a:b$ に内分する点 P を考える。線分 AB の端点 A は x 軸上，端点 B は y 軸上を動くものとする。

(1) 点 P の描く曲線の方程式を求めよ。

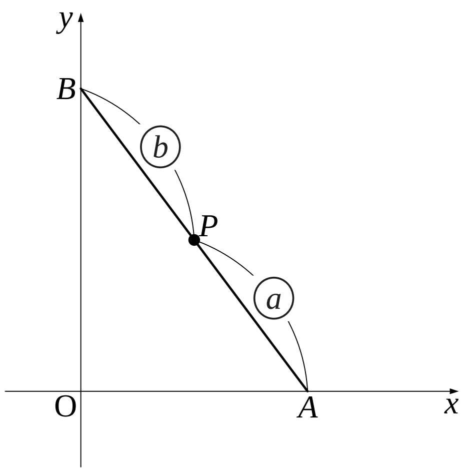
(2) この曲線に線分 AB が接するときの点 P の座標を求めよ。

筑波大学の過去問す。楕円の接線と軌跡に融合問題です。

決して難しい問題ではないですが、融合問題に慣れていないと少し難しいかもしれません。ですが、大学受験には融合問題は頻出なので、こういった問題を通してしっかりと解けるようになっておいてください。

【解説】(1)

よく分からないけど、とりあえず図示していきます。



P の描く軌跡を求めるには A B の座標が必要なのでとりあえず $A(\alpha, 0)$, $B(0, \beta)$ と座標を設定します。

P の座標の求め方は、いろいろとあると思いますがここではベクトルを使って解いていきます。もちろん違う解法でも OK ですよ。

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{OP}} &= \frac{b}{a+b}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \frac{a}{a+b}\overrightarrow{\mathrm{OB}} \\
&= \frac{b}{a+b}(\alpha, 0) + \frac{a}{a+b}(0, \beta) \\
&= \left(\frac{b}{a+b}\alpha,\ \frac{a}{a+b}\beta\right)
\end{aligned}
$$

P を $P(X, Y)$ とすると

$$\begin{cases} X = \dfrac{b}{a+b}\,\alpha \cdots ① \\ Y = \dfrac{a}{a+b}\,\beta \cdots ② \end{cases}$$

① より $\alpha = \dfrac{a+b}{b}\,X$

② より $\beta = \dfrac{a+b}{a}\,Y$

ここからは、α と β は解答を解く上で勝手に設定したのだから、なんとかして α と β は消去しないといけないよね。

そこで、どうしようかな？と考えるんだけど、次のことを思い出してほしいです。

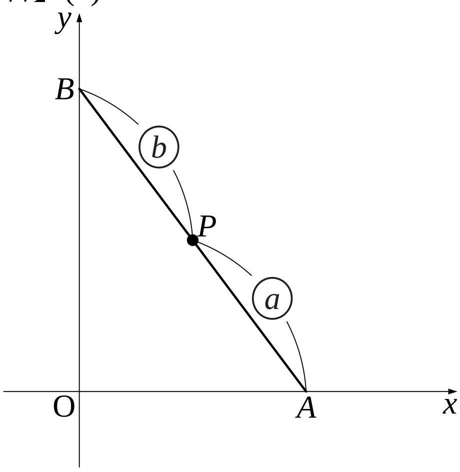
「**数学は、与えられた条件は必ず全て使う**」

与えられた条件は全て使わないといけないから、まだ使っていない条件はあるのかな？という感じで問題文を見直してみると線分 AB の長さが $a+b$っていう条件はまだ使っていないよね。だから、この条件を使っていきます。△OAB は直角三角形だから $AB^2 = OA^2 + OB^2$ が成立します。

後は、これを使って α と β を消去するだけです。

では、解答に進みます。

【解答】(1)



$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{OP}} &= \frac{b}{a+b}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \frac{a}{a+b}\overrightarrow{\mathrm{OB}} \\
&= \frac{b}{a+b}(\alpha, 0) + \frac{a}{a+b}(0, \beta) \\
&= \left(\frac{b}{a+b}\alpha,\ \frac{a}{a+b}\beta\right)
\end{aligned}
$$

P を $P(X, Y)$ とすると

$$
\begin{cases}
X = \dfrac{b}{a+b}\alpha \cdots ① \\
Y = \dfrac{a}{a+b}\beta \cdots ②
\end{cases}
$$

① より $\alpha = \dfrac{a+b}{b}X$

② より $\beta = \dfrac{a+b}{a}Y$

$OA^2 + OB^2 = OA^2$ より $\alpha^2 + \beta^2 = (a+b)^2$ が成立する。この式に ①, ② をそれぞれ代入すると

$$
\begin{aligned}
&\left(\frac{a+b}{b}X\right)^2 + \left(\frac{a+b}{a}Y\right)^2 = (a+b)^2 \\
&\frac{(a+b)^2}{a^2}X^2 + \frac{(a+b)^2}{a^2}Y^2 = (a+b)^2 \\
&\frac{X^2}{b^2} + \frac{Y^2}{a^2} = 1 \quad \blacktriangleleft \text{両辺を } (a+b)^2 (\neq 0) \text{ で割った}
\end{aligned}
$$

よって、P が描く曲線の方程式は $\dfrac{x^2}{b^2} + \dfrac{y^2}{a^2} = 1$ である。

【解説】(2)

問題文には、「この曲線に線分 AB が接するとき」と書いてありますが、P は線分 AB 上にあるし、曲線上にもあるので、当然 P が接点となります。あたりまえなんですが、解答にも書いておいたほうが無難です。

また、意外に知らないというか忘れてしまっている人が多いんですが、

楕円 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ 上の点 (x_1, y_1) における接線は $\dfrac{x_1 x}{a^2} + \dfrac{y_1 y}{b^2} = 1$ です。円の接線の公式とほとんど同じなので覚えやすいと思います。忘れていた人は、しっかりと

覚えておいてください。

この問題は、上記を使っていくだけです。では、解答に進みます。

【解答】(2)

点 P は、直線 AB 上にあり、また (1) で求めた $\dfrac{x^2}{b^2}+\dfrac{y^2}{a^2}=1$ にあるので P が接点となる。

(1) より P の座標は $P\left(\dfrac{b}{a+b}\alpha,\ \dfrac{a}{a+b}\beta\right)$ となるので、

接線は $\dfrac{\frac{b}{a+b}\alpha}{b^2}x+\dfrac{\frac{a}{a+b}\beta}{a^2}y=1\cdots(*)$ ◀ 楕円の接線の公式より となる。

$(*)$ は $A(\alpha,\ 0)$ を通るので、$(*)$ に $x=\alpha,\ y=0$ をそれぞれ代入して

$$\frac{\frac{b}{a+b}\alpha}{b^2}\alpha=1$$

$$\frac{b\alpha^2}{(a+b)\,b^2}=1$$

$$\alpha^2=b(a+b)$$

$$\alpha=\pm\sqrt{b(a+b)}$$

同様にして、$(*)$ は $B(0,\ \beta)$ を通るので、$(*)$ に $x=0,\ y=\beta$ をそれぞれ代入して

$$\frac{\frac{a}{a+b}\beta}{a^2}\beta=1$$

$$\frac{a\beta^2}{a^2(a+b)}=1$$

$$\beta^2=a(a+b)$$

$$\beta=\pm\sqrt{a(a+b)}$$

求める座標 P は $\left(\dfrac{b}{a+b}\alpha,\ \dfrac{a}{a+b}\beta\right)$ なので

$P\left(\pm\dfrac{b\sqrt{b(a+b)}}{a+b},\ \pm\dfrac{a\sqrt{a(a+b)}}{a+b}\right)$ (複合は任意) となる。

河見賢司

高校数学の勉強法
http://www.hmg-gen.com/

感想はこちらまでメールをください（何か言ってもらえると嬉しいです）
magdai@hmg-gen.com

大好評の無料メルマガ
「**高校数学の達人・河見賢司のメルマガ**」は以下から登録できます。
http://www.hmg-gen.com/merumagatouroku.html