問題

$x > 0$ に対して、$\dfrac{1}{x+1} < \log\left(1+\dfrac{1}{x}\right) < \dfrac{1}{x}$ を示せ。

【解説】
2007 年のお茶の水女子大学の過去問です。パッと見た感じでは「関数の不等式の証明だから微分を使うのかな？」と思うかもしれません。

実はこれ「積分の面積を使って解く問題」です。最初のうちはなかなか気づきにくいかもしれませんが、少しポイントとして上げると今回の問題は $f(x) < g(x) < h(x)$ を示せという問題です。

この不等式を微分を使った方法で示すとなると $g(x) - f(x) > 0$ と $h(x) - f(x) > 0$ の 2 種類を証明しないといけません。これって面倒だよね？絶対とは言わないけど、こういうふうに $f(x) < g(x) < h(x)$ の形をしている時は微分を使った方法以外によい方法があるということが多いです。覚えておいてください。

少し余談になりますが、「面倒だから他の解き方を考えるってなんだか論理的じゃないですね」というようなことを言われたことがあります。

確かに論理的じゃないですよね。ただ、**数学って単に面倒なだけの問題が出ることって本当に少ない**んです。出題者もそんなこと望んでいないのかな？と思います。だから、問題を解いていて、**「この解き方で解けるけど、あまりに面倒すぎるな」と思えるときは、何か別にもっと良い解き方ある可能性が高い**です。意外に重要な事なので覚えておいてください。

それでは、問題の解説に進みたいと思います。

まず、中央の $\log\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$ を次のように式変形をします。

$$\log\left(1+\frac{1}{x}\right)$$
$$=\log\frac{x+1}{x}$$ ◀ 通分をした
$$=\log(x+1)-\log x$$ ◀ log の公式 $\log\frac{A}{B}=\log A-\log B$ より
$$=\int_x^{x+1}\frac{1}{t}\,dt$$

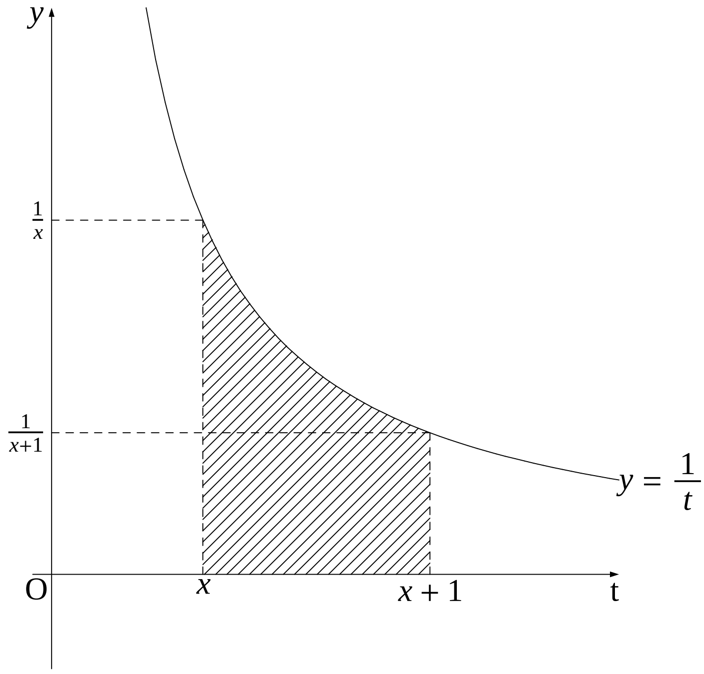
上記のように式変形できました。最後の式変形の $\log(x+1)-\log x=\int_x^{x+1}\frac{1}{t}\,dt$ が分からないという人もいると思います。そういった人は右辺の $\int_x^{x+1}\frac{1}{t}\,dt$ を積分の計算を普通にしてみてください。そうすると、左辺の $\log(x+1)-\log x$ になっているとうことが分かると思いますよ。

この式変形を見て多くの人は「こんな式変形、言われたら気づくけど、こんなの言われないと気付かないよ」と思うと思います。僕も、はじめて勉強したときはあなたと同じように「こんなん気付かへんわ！(関西弁です)」と感じたのを覚えています。

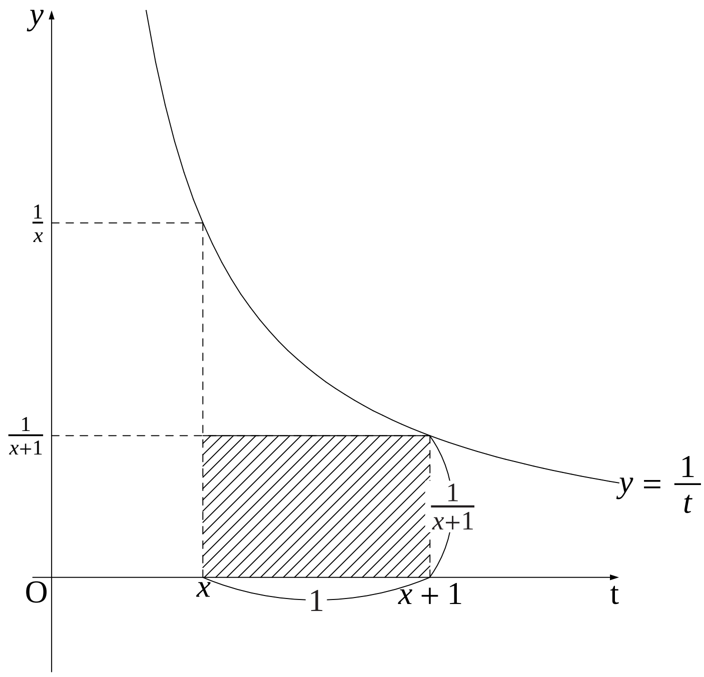
で、これなんですけど気付く、気付かないじゃなくて「覚えてね」ということです。実は今回の問題は本当に頻出です。最初に話したけど $f(x)<g(x)<h(x)$ の形をしている時は、微分以外の解き方があると言いました。微分以外の解き方って言ったけど、ほとんどの場合積分を使って解いていく解法です。

$f(x)<g(x)<h(x)$ の場合、真ん中の $g(x)$ が積分を使える形になります。そして、今回は真ん中の $g(x)$ が log を含んだ式ですが、$\int\frac{1}{t}\,dt$ を使って表せることが多いです。これは、始めて見て思いつけるという人は少ないです。よく出てくる式変形なので覚えてしまってください。

このことより示したい式は $\frac{1}{x+1}<\int_x^{x+1}\frac{1}{t}\,dt<\frac{1}{x}$ です。まず、真ん中の式 $\int_x^{x+1}\frac{1}{t}\,dt$ はどういったものを表しているか分かる？これって以下の斜線部の面積だよね。

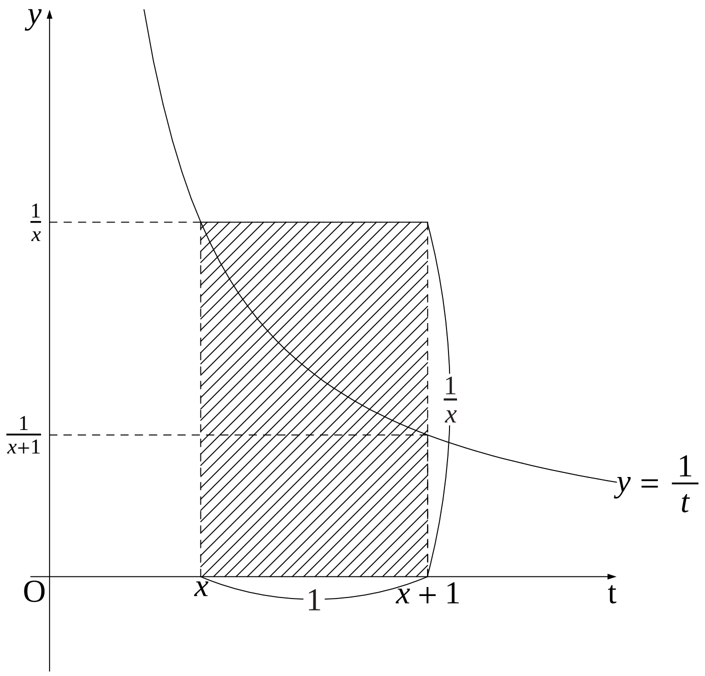


一方で、少し気付きにくいかもしれないけど左辺の $\dfrac{1}{x+1}$ は $1 \times \dfrac{1}{x+1}$ と変形できます。これは、下の長方形の面積を表します。



これで $\dfrac{1}{x+1} < \displaystyle\int_x^{x+1} \frac{1}{t}\,dt$っていうのは面積を考えたら明らかに成立するんじゃない？こ

こまで来たら右側の方も同じように考えたらいいということが分かると思います。次に右辺の $\int_{x}^{x+1} \frac{1}{t}\,dt < \frac{1}{x}$ の方を見ていきます。



それでは、解答に進みたいと思います。

【解答】

$x > 0$ のとき、$\frac{1}{x+1} < \log\left(1+\frac{1}{x}\right) < \frac{1}{x}$ を示す。

$$\log\left(1+\frac{1}{x}\right)$$

$$= \log\frac{x+1}{x}$$ ◀ 通分をした

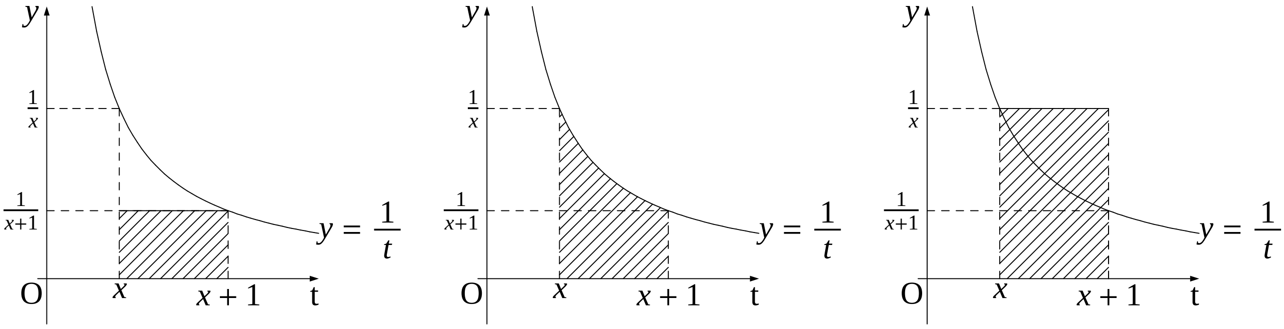
$$= \log(x+1) - \log x$$ ◀ log の公式 $\log\frac{A}{B} = \log A - \log B$ より

$$= \int_{x}^{x+1} \frac{1}{t}\,dt$$

より、

$$\frac{1}{x+1} < \log\left(1+\frac{1}{x}\right) < \frac{1}{x}$$

$$\Leftrightarrow \ \frac{1}{x+1} < \int_x^{x+1} \frac{1}{t}\,dt < \frac{1}{x}$$



上図の斜線部の面積は左より順に $\frac{1}{x+1}$, $\int_x^{x+1} \frac{1}{t}\,dt$, $\frac{1}{x}$ を表している。

図より、明らかに $\frac{1}{x+1} < \int_x^{x+1} \frac{1}{t}\,dt < \frac{1}{x}$ が成立する。よって題意は示された。

今回の問題はどうだったでしょうか？面積を使って不等式を示すなんて知らない人も多かったと思います。でも、実際の大学受験では最頻出とまではいかないですが比較的よく出てきます。

今回のこの問題もまったく同じ問題が確か広島大学でも出題されていたと思いますし、似たような問題は過去何回も出題されている有名問題です。答えを見てもらえば分かると思いますが、知っていたらごくごく簡単に解ける問題です。しっかりと理解しておいてください。

河見賢司

高校数学の勉強法
http://www.hmg-gen.com/

感想はこちらまでメールをください（何か言ってもらえると嬉しいです）
magdai@hmg-gen.com

大好評の無料メルマガ
「**高校数学の達人・河見賢司のメルマガ**」は以下から登録できます。
http://www.hmg-gen.com/merumagatouroku.html