問題

曲線 $y = 2x^3 - 12x$ を C とし、点 $(1, -2)$ を通る C の接線を l とする。このとき、次の問いに答えよ。

(1) l の方程式を求めよ

(2) C と l とで囲まれた図形の面積を求めよ

【解説】
新潟大学の過去問です。こういった３次関数とその接線によって囲まれた部分の面積はよく出てきます。

この問題は公式を使えば、ほんの数分で解くことができます。知らない人もいるかもしれませんが、有名な公式です。難関大学を受ける人は特にこの公式を覚えておくようにしてください。

(１)
【解説】
接線を求める問題ですが、接線を求めるには当たり前ですが接点が必要です。ですが、**今回の問題では接線が通る点は与えられていますが、接点は与えられていません。こういったときは、自分で接点を $x = t$ とでもおいて解いていくことがポイント**です。

それでは、解答に進みます。

【解答】
接点をの x 座標を t とする。

$y = f(x) = 2x^3 - 12x$ とする。

$$f(x) = 2x^3 - 12x$$
$$f'(x) = 6x^2 - 12$$

求める接線は $(t, 2t^3 - 12t)$ を通り、傾き $f'(t) = 6t^2 - 12$ の直線なので

$$y - (2t^3 - 12t) = (6t^2 - 12)(x - t)$$
$$y = (6t^2 - 12)x - 6t^3 + 12t + 2t^3 - 12t$$
$$= (6t^2 - 12)x - 4t^3$$

これが $(1, -2)$ を通るので、

$$-2 = (6t^2 - 12) - 4t^3$$
$$4t^3 - 6t^2 + 10 = 0$$
$$2t^3 - 3t^2 + 5 = 0$$
$$(t+1)(2t^2 - 5t + 5) = 0$$

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 2 & -3 & 0 & 5 \\ & & -2 & 5 & -5 \\ \hline & 2 & -5 & 5 & \boxed{0} \end{array}$$

ここで $2t^2 - 5t + 5 = 0$ の判別式を D とすると $D = (-5)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 5 = -15 < 0$ より実数解を持たないので、$t = -1$ となる。

$y = (6t^2 - 12)x - 4t^3$ に $t = -1$ を代入すると $y = -6x + 4$ ◀ これが答え

(2) 【解答】
この問題は普通にやってももちろん解くことができますが、以下の公式を使って解いていきます。

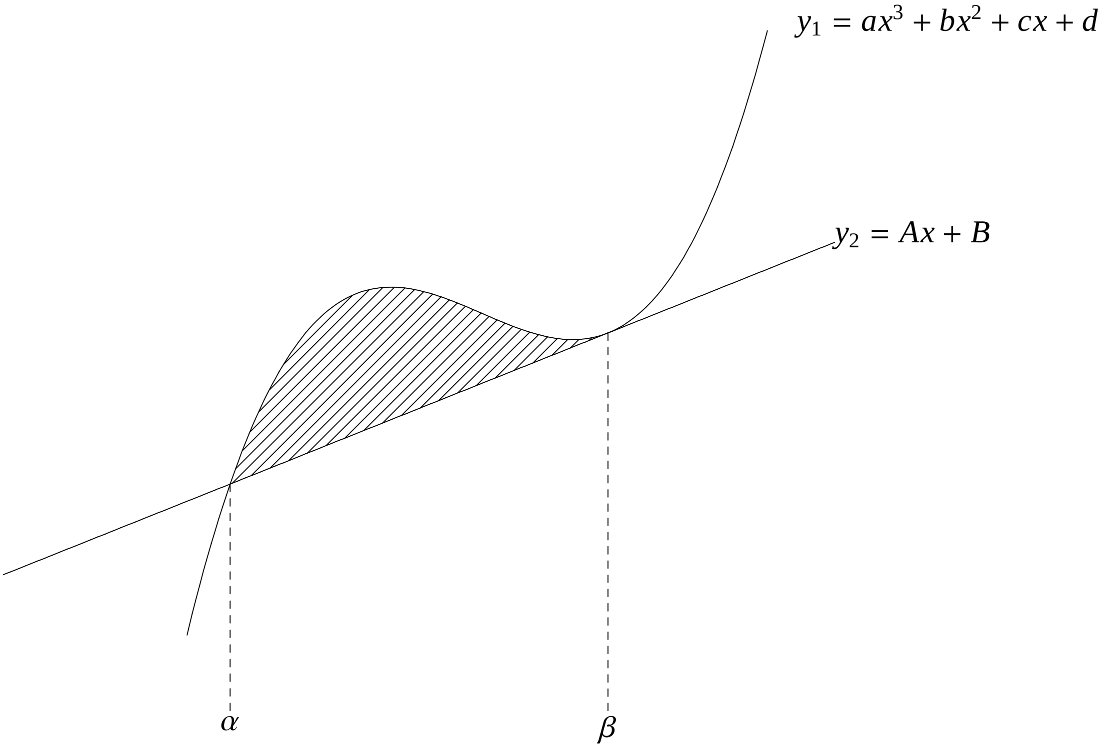
積分の重要公式

$$\int_{\alpha}^{\beta} (x-\alpha)^m (\beta - x)^n \, dx = \frac{m!\, n!}{(m+n+1)!} (\beta - \alpha)^{m+n+1}$$

少し長い公式ですが、本当に重要です。ちなみにこの公式は数学 III を勉強していたら導くことができます。積分漸化式という問題で、この類の問題自体大学受験では頻出です。

数学 III の内容ですが、以下のページで導いています。興味のある人は、見ておいてください。http://www.hmg-gen.com/k-tensaku110118

この公式をどのように使うかということですが、次のように 3 次関数と接線によって囲まれる部分の面積は上記の公式を使って求めることができます。



上記の斜線部の面積ですが、当然 $\int_\alpha^\beta (y_1 - y_2)\,dx$ で計算をすることができます。

で、$y_1 - y_2$ がどんな形になるか今から考えていきます。まず、$y_1 = ax^3 + bx^2 + cx + d$ で $y_2 = Ax + B$ なので、単純に $y_1 - y_2$ をすると $y_1 - y_2 = ax^3 + bx^2 + (c - A)\,x + d - B$ となります。ここで、言いたいことは $y_1 - y_2$ は x^3 の係数が a の3次関数になるということです。

また、y_1 と y_2 は $x = \alpha$ で交わって、$x = \beta$ で接します。
これより $y_1 - y_2 = \bigcirc\,(x - \alpha)\,(x - \beta)^2$ となります。◯の部分は当然 x^3 の係数と一致します。今回は x^3 の係数は a です。

以上のことより、$y_1 - y_2 = a\,(x - \alpha)\,(x - \beta)^2$ となります。

公式のインテグラルの中は $(x - \alpha)^m\,(\beta - x)^n$ です。今回求まった $y_1 - y_2 = a\,(x - \alpha)\,(x - \beta)^2$ の $(x - \beta)^2$ は $(\beta - x)^2$ でもあります。← 2乗したとき $a^2 = (-a)^2$ なんだから、当然 $(x - \beta)^2$ は $(\beta - x)^2$ と等しいよね

これで先ほどの公式を使って計算をすると、

$$\int_{\alpha}^{\beta} a(x-\alpha)(\beta-x)^2\,dx$$
$$=a\cdot\frac{1!2!}{(1+1+2)!}(\beta-\alpha)^{1+1+2}$$
$$=\frac{a}{12}(\beta-\alpha)^4$$

2次関数と直線によって囲まれる部分の面積は $\frac{a}{6}(\beta-\alpha)^3$、3次関数とその接線に囲まれる部分の面積は $\frac{a}{12}(\beta-\alpha)^4$ で、4次関数とその接線によって囲まれる部分の面積は $\frac{a}{30}(\beta-\alpha)^5$ なんて公式として覚えている人もいるかもしれないけど、これらの公式はすべて今回話した積分の公式から簡単に導くことができます。便利なので、覚えておいた方がいいですよ。

【解答】
$f(x)=2x^3-12x,\ g(x)=-6x+4$ とする。$f(x)$ と $g(x)$ の交点を求める

$2x^3-12x=-6x+4$

$2x^3-6x-4=0$

$(x+1)^2(x-2)=0$

⇑上記の計算だが、組立除法を用いて計算をした。(1) より、$x=-1$ で接するので当然 $x=-1$ は重解となる

$$S=\int_{-1}^{2}\{g(x)-f(x)\}\,dx$$
$$=\int_{-1}^{2}2(x+1)^2(2-x)\,dx$$
$$=2\cdot\frac{2!1!}{(2+1+1)!}(2+1)^{2+1+1}$$
$$=2\cdot\frac{1}{12}\cdot 3^4$$
$$=\frac{27}{2}$$ ◀ これが答え

今回の問題はどうだったでしょうか。繰り返しになりますが、こういうふうな3次関数

とその接線によって囲まれる部分の面積は頻出です。それでは、がんばってください。

河見賢司

高校数学の勉強法
http://www.hmg-gen.com/

感想はこちらまでメールをください（何か言ってもらえると嬉しいです）
magdai@hmg-gen.com