

問題

a, b は $a \neq b$ の実数である。このとき 2 次関数 $f(x) = (x - 2a)(x - 2b) - (2x - a - 3b)$ は x 軸と異なる 2 点で交わることを示せ

【解説】

2 次関数が x 軸と交わる問題なので、ほとんどの人が「判別式を使うのかな？」と考えます。この問題は判別式で解けないことないですけど、判別式を使える形にするには $ax^2 + bx + c = 0$ という形にする必要があります。

今回の問題は、 $f(x) = (x - 2a)(x - 2b) - (2x - a - 3b)$ ですがこれを $ax^2 + bx + c$ の形にするのって面倒だよな？だから、何か別の方法はないかな？と考えられるようになっておいて欲しいです。

「面倒だから、他の解法？そんな根拠のない考え方していいの？」と思った人もいます。確かに、根拠としては少し適当すぎるかもしれないですけど、 $f(x) = (x - 2a)(x - 2b) - (2x - a - 3b)$ を展開して x について整理するっていうことは誰でもできることだよな。

「受験問題でこんな誰でもできるような簡単なことをおさせる訳がない」よね。だって、誰でもできるんだったらそもそも展開した式を載せているはずです。

ということは、展開して x について整理するんじゃなくて、 $f(x) = (x - 2a)(x - 2b) - (2x - a - 3b)$ このままの形で考えていくのかな？という発想が生まれてきます。

(注) こういうことを言うと「この問題ではそういうことが言えるけど、他の入試問題ではこんなこと言えないんじゃないの？」なんて言う人がいます。もちろん、全ての問題でそういうことがいえることはありません。ですが、こういうふうに考えるものも多いです。

とにかく受験問題で、「あまりにも簡単なもの」や「(今回の問題のように) 誰でも解けるけど、その計算をするのは面倒だな」と感じられるものには、他のうまい解法が存在することが多いです。これは受験問題を考える上で本当に重要な思考法になるのでぜひとも頭に入れておいてください。

で、 $f(x) = (x - 2a)(x - 2b) - (2x - a - 3b)$ をそのまま解いていくのかな？ということになりました。ここから、どうするかというと、 $x = 2a, 2b$ または $x = \frac{a + 3b}{2}$ を代入していくのかな？と考えられるようになって欲しいです。

どういふふうに思いついたかと言うと、数学っていうのは数が多いほど考えにくいです。
 $x = 2a, 2b$ または $x = \frac{a+3b}{2}$ などを代入すると、項が消えてくれるよね？

とにかく解けるっていう根拠はないけど、「項が少なくなると考えやすくなる」だから「項を減らそうか」という方向で考えています。まあ、慣れてきたら一瞬で分かると思うけど、 $f(x) = (x-2a)(x-2b) - (2x-a-3b)$ を x について整理せずにこの形のまま解いていけ、と言われたらこうするくらいしが方法がないよね。

ちなみに実際に $x = 2a, 2b$ または $x = \frac{a+3b}{2}$ を代入してみたら分かると思いますが、今回は $x = 2a$ と $2b$ を代入します。勘のいい人は予想できたかもしれませんが、 $2a$ と $2b$ が似ている式なのでなんとなくこの2つを代入しそうだよね？それでも、無理な場合 $x = \frac{a+3b}{2}$ を代入するのかな？と思えるようになっておいてください。

あと、ここからは話が変わりますが、下に凸な2次関数 (x^2 の係数が正) の場合、ひとつでも y の値が負となるような x が存在したら絶対に2次関数は x 軸と2点で交わってくれます。

これって分かるよね？この考えは、たまに出てくるので、しっかりと理解しておいてください。それでは、解答に進みたいと思います。

【解答】

$$f(x) = (x-2a)(x-2b) - (2x-a-3b)$$

$$\begin{aligned} f(2a) &= (2a-2a)(2a-2b) - (2 \cdot 2a - a - 3b) \\ &= -3(a-b) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(2b) &= (2b-2a)(2b-2b) - (2 \cdot 2b - a - 3b) \\ &= a-b \end{aligned}$$

ここで、 $a \neq b$ より $f(2a)$ と $f(2b)$ は異符号。

$f(2a)$ と $f(2b)$ は異符号ということと、 $f(x)$ は下に凸な2次関数ということを考え、 $f(x)$ は x 軸と異なる2点で交わる。

今回の問題はどうかだったでしょうか？受験問題としては、簡単なものですが受験問題の考え方を理解して欲しいと思ったので、あえて載せてみました。それでは、がんばってください。

河見賢司

高校数学の勉強法

<http://www.hmg-gen.com/>

感想はこちらまでメールをください（何か言ってもらえると嬉しいです）

magdai@hmg-gen.com

大好評の無料メルマガ

「高校数学の達人・河見賢司のメルマガ」は以下から登録できます。

<http://www.hmg-gen.com/merumagatouroku.html>