問題

(1) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx$ を計算せよ

(2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^9 x\,dx$ を計算せよ

(3) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{10} x\,dx$ を計算せよ

【解説】

積分漸化式の問題です。今回の問題は、積分漸化式の中では一番有名な問題のひとつかな？と思います。熱心に勉強している人なら、一度は見たことのある問題かもしれません。

と言っても、まったく簡単ではないと思いますよ。受験生時代、僕は頭が悪かったということがあるかもしれませんが、理解できるまで何度も何度も解きなおしたことを覚えています。

簡単にすぐに理解できる人もいると思いますが、すぐに理解できなくても僕のように繰り返しやっていたら確実にできるようになります。理解できるまで、何度も何度も繰り返してください。

それでは、問題に進みたいと思います。まずは、次の事柄を覚えておいてください。

積分漸化式の問題

積分漸化式の問題では、最初に部分積分をすることが多い！

(注) 積分漸化式も有名なものが何問かありますが、そのほとんどは最初に部分積分をします。部分積分しないもので、記憶にあるのは $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x\,dx$ くらいでしょうか。他にもあるかもしれませんが、積分漸化式を見たらまず部分積分かな？と思えるようにしてください。

で、$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx$ を部分積分をしないといけないんだけど、部分積分をするには当然ですけど、積の形になっていないといけません。そこで、$\sin^n x = \sin x \cdot \sin^{n-1} x$ と強引に積の形にしてから解いていくことにします。

(注) こういった式変形をすると、「そんなの思いつかないよ」という人がたまにいます。確かにそうですよ。こんなの知っていないと思いつきようがありません。

数学全般的に言えることですけど、解法を知っておかないとどうしようもない問題と言うものも存在します。知らなければいくら考えたムダです。ですから、普段勉強をするときもひとつずつ丁寧に解法を覚えていくようにしてください。

$a_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx$ とでもして、部分積分をすることにします。

$$\begin{aligned} a_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cdot \sin^{n-1} x\,dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-\cos x)' \cdot \sin^{n-1} x\,dx \\ &= \Big[-\cos x \cdot \sin^{n-1} x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-\cos x) \cdot (n-1)\sin^{n-2} x \cdot (\sin x)'\,dx \end{aligned}$$

◀ 部分積分をした！

で、ここからなんだけど上記の式の左側 $\Big[-\cos x \cdot \sin^{n-1} x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}$ は、どうなるか分かるかな？ $-\cos x \cdot \sin^{n-1} x$ の x に $x = 0$ や $x = \dfrac{\pi}{2}$ を代入するんだけど、まず $x = 0$ を代入すると $\sin x = 0$ となります。次に $x = \dfrac{\pi}{2}$ を代入すると $\cos x = 0$ となります。

このことより、$\Big[-\cos x \cdot \sin^{n-1} x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = 0$ となります。

$$\begin{aligned} a_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cdot \sin^{n-1} x\,dx \\ &= \Big[-\cos x \cdot \sin^{n-1} x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-\cos x) \cdot (n-1)\sin^{n-2} x \cdot (\sin x)'\,dx \\ &= (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x \cdot \cos^2 x\,dx \end{aligned}$$

とりあえず、**積分漸化式は最初に部分積分をする**という鉄則に従ってここまで式変形をしてきたけど、ここからどうするか分かるかな？積分漸化式っていうくらいだから、漸化式ができるはずだよね (← そうじゃないと問題が解けない！) ということは、ここから n と a_n に関する式ができるはず。

この考えを頭に入れて考えると、$a_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx$ ってよく見ると $\sin x$ のみの式で、$\cos x$

は含んでいないよね。そこで、$(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x \cdot \cos^2 x\,dx$ は $\sin x$ と $\cos x$ を含んだ式なので、とりあえず $\cos x$ を消去して $\sin x$ のみの式にしてみます。

$$\begin{aligned}
a_n &= (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x \cdot \cos^2 x\,dx \\
&= (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x \cdot (1-\sin^2 x)\,dx \quad \blacktriangleleft\ \cos^2 x = 1-\sin^2 x \text{ より。これで } \sin x \text{ のみの式にした！} \\
&= (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^{n-2} x - \sin^n x)\,dx \\
&= (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x\,dx - (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx
\end{aligned}$$

とりあえず、部分積分をして sin のみの式にすることによってここまできました。で、ここからなんですけど、ちょっと気付きにくい人もいるかもしれないけど、$a_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx$ なんだから、$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x\,dx = a_{n-2}$ だよね。このことより次の関係式が成立します。

$a_n = (n-1)\,a_{n-2} - (n-1)\,a_n$ これを整理していきます。

$$\begin{aligned}
a_n &= (n-1)\,a_{n-2} - n\,a_n + a_n \\
n\,a_n &= (n-1)\,a_{n-2} \\
a_n &= \frac{n-1}{n}\,a_{n-2}
\end{aligned}$$

上記で、いよいよ漸化式を作ることができました。**積分漸化式で、部分積分をするのはこういうふうに漸化式を作ることが目的です。**ここからは、積分は関係なく純粋な漸化式の問題です。といっても数学 B で勉強した基本的な漸化式よりもややこしいと思います。数学 III には、こういった漸化式が頻出ですので、しっかりと解けるようになっておいてください。

で、ここからなんですけど

$a_n = \dfrac{n-1}{n}\,a_{n-2}$ の n を $n-2$ に置き換えると

$$a_{n-2} = \frac{n-2-1}{n-2} a_{n-4}$$ ◀ $a_n = \frac{n-1}{n} a_{n-2}$ の n に $n-2$ を代入した

$$= \frac{n-3}{n-2} a_{n-4}$$

これより、

$$a_n = \frac{n-1}{n} a_{n-2}$$
$$= \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} a_{n-4}$$

あとは、これを繰り返していくだけです。ただ、今回は a_{n-2} の次が a_{n-4} というように 2 個ずつ小さくなっているので、注意が必要です。

$n \geqq 0$ とすると、n が偶数のときは 2 個ずつ小さいくなるので、一番小さいものは a_0 です。ですが、n が奇数のときは 2 個ずつ小さくなるので、一番小さいものは a_1 です。このように、偶数、奇数で違ってくるので当然場合分けが必要です。まずは、n が偶数のときから考えていくものとします。

n が偶数のとき、漸化式をどんどんと変形していくと次のようになります。

$a_n = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdots \frac{\bigcirc}{\triangle} a_0$ この ○ と △ の中にはどんな数字がくるか分かるかな？ここが、結構ポイントです。漸化式として重要なところなので、ぜひとも理解しておいてください。

まずは、○ の方から考えていくことにします。

$$a_n = \frac{n-1}{n} a_{n-2}$$
$$a_n = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} a_{n-4}$$
$$a_n = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdot \frac{n-5}{n-4} a_{n-6}$$

上記の赤字のところと青字のところを見比べて欲しいんだけど、赤字のところはいつも青字のところよりも 1 だけ大きな数字になっていない?これより、$a_n = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdots \frac{\bigcirc}{\triangle} a_0$ の ○ の部分には 0 より 1 だけ大きい、1 がきます。

これで、◯が分かったので、次に△の方です。これも関係を見ていたら分かるよね。分母は分子に比べていつも 1 だけ大きいので、分子の◯が 1 のとき、分母の△は 2 になります。

以上のことより、n が偶数のとき $a_n = \dfrac{n-1}{n} \cdot \dfrac{n-3}{n-2} \cdots \dfrac{1}{2} a_0$ になります。ちなみに、これがほとんど答えです。あとは、a_0 を計算するだけです。

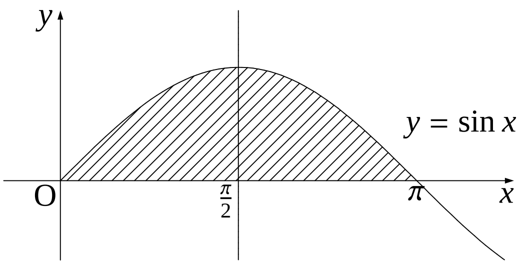
$$a_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^0 x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 \, dx = \Big[x \Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} \text{ です。}$$

これで、偶数のときが終わったので、次に奇数のときに進みたいと思います。奇数のときも、偶数のときと同じように考えていったらいいだけです。

奇数のときは、a_0 でなく a_1 まで、進むので

$a_n = \dfrac{n-1}{n} \cdot \dfrac{n-3}{n-2} \cdots \dfrac{2}{3} a_1$ となります。

ちなみに $a_1 = 1$ です。これは、計算をしてもらってもいいのですが、以下の事柄は暗記しておいた方がいいと思いますよ。



上手の斜線部は、$y = \sin x$ と x 軸によって囲まれる部分の面積は計算すると明らかですが、2 になります。これより $a_1 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx$ は斜線部の半分の面積を表すので当然 1 になります。

これは、計算でごくごく簡単に出すことができますが、よく出てくるので覚えてしまった方がいいです。

それでは、解答に進みたいと思います。

【解答】
(1)
$a_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\, dx$ とする。

$$
\begin{aligned}
a_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cdot \sin^{n-1} x\, dx \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-\cos x)' \cdot \sin^{n-1} x\, dx \\
&= \Big[-\cos x \cdot \sin^{n-1} x \Big]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-\cos x) \cdot (n-1)\, \sin^{n-2} x \cdot (\sin x)'\, dx \quad \blacktriangleleft \text{部分積分をした！} \\
&= (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x \cdot \cos^2 x\, dx \\
&= (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x \cdot (1 - \sin^2 x)\, dx \quad \blacktriangleleft \cos^2 x = 1 - \sin^2 x \text{ より。これで } \sin x \text{ のみの式にした！} \\
&= (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^{n-2} x - \sin^n x)\, dx \\
&= (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x\, dx - (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\, dx
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
a_n &= (n-1)\, a_{n-2} - (n-1)\, a_n \\
n\, a_n &= (n-1)\, a_{n-2} \\
a_n &= \frac{n-1}{n}\, a_{n-2} \\
&= \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2}\, a_{n-4} \\
&\quad \cdots \\
&\quad \cdots \\
&= \begin{cases} \dfrac{n-1}{n} \cdot \dfrac{n-3}{n-2} \cdots \dfrac{1}{2}\, a_0 & (n \text{ が偶数のとき}) \\[2ex] \dfrac{n-1}{n} \cdot \dfrac{n-3}{n-2} \cdots \dfrac{2}{3}\, a_1 & (n \text{ が奇数のとき}) \end{cases}
\end{aligned}
$$

$a_0 = \dfrac{\pi}{2},\ a_1 = 1$ を考え、以下のようになる

$$a_n = \begin{cases} \dfrac{n-1}{n} \cdot \dfrac{n-3}{n-2} \cdots \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{\pi}{2} & (n\text{ が偶数のとき}) \\ \dfrac{n-1}{n} \cdot \dfrac{n-3}{n-2} \cdots \dfrac{2}{3} \cdot 1 & (n\text{ が奇数のとき}) \end{cases}$$ ◀ これが答え

(2)
(1) を利用して

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^9 x\,dx$$

$$= \frac{8}{9} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} \cdot 1$$

$$= \frac{128}{315}$$ ◀ これが答え

(3)
(1) を利用して

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{10} x\,dx$$

$$= \frac{9}{10} \cdot \frac{7}{8} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}$$

$$= \frac{63}{512}\pi$$ ◀ これが答え

今回の積分漸化式ですが、本当は暗記して欲しいくらいの問題です。そのくらいよく出題されます。

今回とは違い(1)なしに、いきなり $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 x\,dx$ を求めよという問題もでてきます(別に６乗とは限りませんよ)。このときに、証明なしに今回の公式を使うのは少しまずいかもしれません。ですから、実際の答案では今回のように証明をしてから解くようにしたらいいと思います。

慣れるまでは時間がかかるかもしれませんが、こんなの慣れてきたら３分もかかりません。そのくらい、短時間で導けるようになるまで繰り返しておいて欲しいです。それでは、頑張ってください。

河見賢司

高校数学の勉強法
http://www.hmg-gen.com/

感想はこちらまでメールをください（何か言ってもらえると嬉しいです）
magdai@hmg-gen.com