

問題

- (1) 関数 $y = \sin x + \cos 2x$ のとりうる値の範囲を求めよ
(2) $\log_2 7$ が無理数であることを示せ

【解説】

和歌山大学の2008年の過去問で、文系学部の大問1の問題です。大問1となっていますが、国公立大学にしては珍しく(1)と(2)がまったく関係なく独立した問題です。

それでは、問題に進みます。まずは、(1)の解説からです。

【(1)の解説】

「 $y = \sin x + \cos 2x$ のとりうる値の範囲を求めよ」という問題です。数学の問題では、とにかくいろいろと混じっていたら考えにくいです。そこで、統一できるときは統一してから考えていきます。

今回は、 $\sin x$ と $\cos 2x$ が混じっているの、考えにくいです。そこで、なんとかして統一できないか？と考えるんだけど \cos の2倍角の公式から $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$ とすることで、与式は $\sin x$ のみに統一することができます。ちなみに \cos の2倍角は $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x = 2\cos^2 x - 1$ というふうに $\sin x$ のみの式にも、 $\cos x$ のみの式にもできます。これは利用することが多いので、覚えておいた方がいいですよ。

$$\begin{aligned} y &= \sin x + \cos 2x \\ &= \sin x + 1 - 2\sin^2 x \quad \leftarrow \cos 2x = 1 - 2\sin^2 x \text{ より} \\ &= -2\sin^2 x + \sin x + 1 \end{aligned}$$

ここから $y = -2\sin^2 x + \sin x + 1$ のとりうる値の範囲を求めればいいんだけど、どうしようかな？とりうる値の範囲って最大値、最小値とほとんど同じことだよね。そこで、次のことを覚えておいてください。

関数の最大値、最小値問題の考え方

関数の最大値、最小値問題ではグラフをかいて考える！

で、今回もグラフをかくのかな？と思うんだけど、 $y = -2\sin^2 x + \sin x + 1$ のグラフなん

てかきにくいよね(数学IIIを勉強していたら、かける。でも、面倒だからこのままグラフをかくという方法はお勧めしません)

そこで、もう一回 $y = -2\sin^2 x + \sin x + 1$ をよく見てみると、 $\sin x$ のみの式だよね。そこで、 $\sin x$ を X とでも置き換えてみると、 $y = -2\sin^2 x + \sin x + 1$ は $y = -2X^2 + X + 1$ となってくれます。これだったら2次関数だから簡単にかけるよね。

ただ、文字を置き換えたときは次の事柄だけは忘れないようにしてください。

文字を置き換えたときの注意点

文字を置き換えたときは、必ず置き換えた文字の値の範囲に注意する

今回は $\sin x = X$ と置き換えました。 $\sin x$ には $-1 \leq \sin x \leq 1$ という値の範囲があります。 $X = \sin x$ と X と $\sin x$ は等しいんだから、当然 X にも $-1 \leq X \leq 1$ という値の範囲がついてくるよね。

このことは、本当に重要です。「文字を置き換えたときは、範囲に注意!」このことを徹底して、頭に叩き込んでおいてください。

これらのことより、「 $y = -2\sin^2 x + \sin x + 1$ の値の範囲」は「 $y = -2X^2 + X + 1$ の $-1 \leq X \leq 1$ における値の範囲」と一致します。

【(1)の解答】

$$y = \sin x + \cos 2x$$

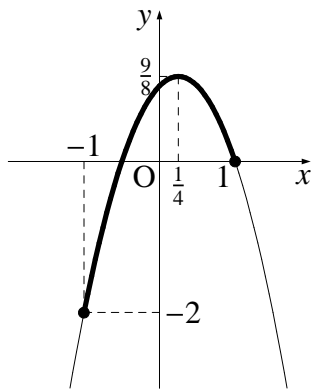
$$= \sin x + 1 - 2\sin^2 x$$

ここで、 $\sin x = X$ とする。 $-1 \leq X \leq 1$

$$y = -2X^2 + X + 1$$

$$= -2\left(X^2 - \frac{1}{2}X\right) + 1$$

$$= -2\left(X - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{9}{8}$$



グラフより、とりうる値の範囲は $-2 \leq \sin x + \cos 2x \leq \frac{9}{8}$ ◀ **これが答え**

【(2)の解説】

「無理数であることを示せ」という問題です。この問題に限らず、無理数であることを直接示すことは難しいことが多いです。そこで、無理数であることを示すには、背理法を使って証明します。

実数には、無理数と有理数しかありません。そこで、与えられた数が有理数でないということが言えたら、無理数であるということが言えます。

こういった証明法を、背理法といいます。実際の受験ではそれほど頻出と言う訳ではないですが、本当に重要な証明法のひとつなのでしっかりと理解しておいてください。

【(2)の解答】

$\log_2 7$ が有理数であると仮定する。

$\log_2 7 > 0$ より、 $\log_2 7 = \frac{n}{m}$ (m と n は正の整数) とおける。

$$\log_2 7 = \frac{n}{m}$$

$$2^{\frac{n}{m}} = 7$$

$$2^n = 7^m (\because \text{両辺を } m \text{ 乗})$$

ここで、2と7は互いに素なので、 $2^n = 7^m$ となる正の整数 m, n は存在しない。よって、

矛盾。

以上より、 $\log_2 7$ は無理数である。

今回はどうだったでしょうか。一応大学受験の問題ですが、それほど難しくない問題です。と、言ってもそれほど簡単という訳ではないので、まずはこのくらいのレベルの問題を確実に解けるようになっておいてください。

河見賢司

高校数学の勉強法

<http://www.hmg-gen.com/>

感想はこちらまでメールをください(何か言ってもらえると嬉しいです)

magdai@hmg-gen.com

大好評の無料メルマガ

「高校数学の達人・河見賢司のメルマガ」は以下から登録できます。

<http://www.hmg-gen.com/merumagatouroku.html>