問題

(1) 連立不等式 $\begin{cases} 3x+2y>0 \\ xy>0 \end{cases}$ の表す領域を座標平面上に図示せよ

(2) 不等式 $2\log_2(3x+2y)>5+\log_2 xy$ の表す領域を座標平面上に図示せよ

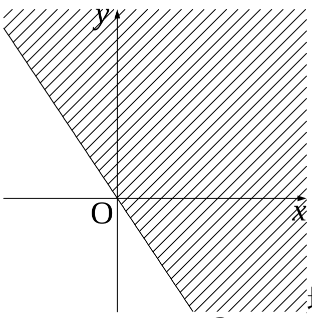
【解説】
２００８年の新潟大学の過去問で、対数と領域の融合問題です。丁寧に考えていけば決して難しくない問題です。このレベルの問題を確実に解けるかどうかということが合否を分けるのかもしれません。それでは、問題に進みます。

【(１) の解説】
まず、$3x+2y>0$ はわかるという人が多いと思うけど、意外に $xy>0$ を解けない人が多いです。これは、よく出てくるのでしっかりと理解しておいて欲しいんだけど、まず $xy>0$ っていうのは２つの数をかけて０より大きいって言ってるんだよね。

２数をかけて０より大きくなるのは、(i) ２数とも正か (ii) ２数とも負の場合しかありません。

よって、$xy>0$ とは、$x>0$ かつ $y>0$ の場合か $x<0$ かつ $y<0$ の場合のいずれかです。こういうふうに丁寧に考えていけば当たり前だよね。それでは、解答に進みたいと思います。

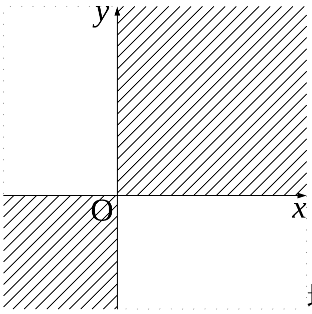
【(１) の解答】
$3x+2y>0$ より、$y>-\dfrac{3}{2}x$ これを図示すると以下の通り。



境界は含まない

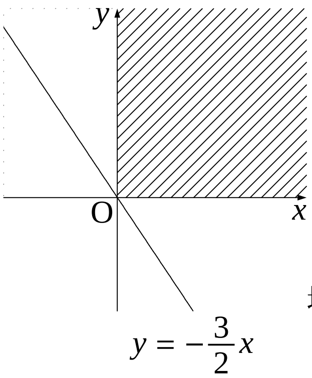
$y=-\dfrac{3}{2}x$

また、$xy>0 \Leftrightarrow (x>0$ かつ $y>0)$ または $(x<0$ かつ $y<0)$ を図示すると以下の通り。



境界は含まない

以上より、$3x + 2y > 0$ かつ $xy > 0$ の表す領域は以下のようになる。



境界は含まない。

【(2) の解説】
(2) をパッと見てみると、真数が $3x + 2y$ と xy だよね。これって明らかに (1) を使うんじゃない？

今回の問題では大したことない (気付かなくても問題は解ける) ですが、(1),(2) というふうになっていたら (2) は (1) を使って解いていくことが多いです。これは大学受験において本当に重要なことなので、しっかりと理解しておいてください。

受験問題の考え方

数学の問題で (1),(2) となっていたら (2) は (1) を使ったり、ヒントにして解いていくことが多い。

特に、(1) が設問とするにはあまりに簡単すぎる場合、(1) と (2) が似ている形のときは前問の結果を使って解いていく！

「あまりに簡単」なんて少し表現がテキトウですが、これって本当に重要です。普通に考えたらあまりに簡単な問題が設問として設定されること自体おかしいよね？そういうときは、「怪しいな」と感じられるようになってください。

出題者としては、「これを使って解け」というにはあまりにも親切すぎる。かと言ってノーヒントだったら難しすぎる。そういったときに、こういうふうに設問としてヒントを与えてくれています。

これは、大学受験では本当に重要なテクニックになるので、知らなかったという人はしっかりと理解しておいてください。

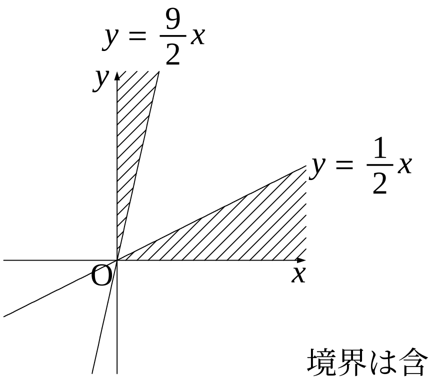
【(2)の解答】
$2\log_2(3x+2y) > 5 + \log_2 xy$

真数条件より ◀ 対数を含んだ式がきたときは、何よりもまず真数条件を考えます

$3x+2y>0$ かつ $xy>0$ となる。これは(1)より $x>0$ かつ $y>0$ であることと同値。

$$2\log_2(3x+2y) > 5 + \log_2 xy$$
$$\log_2(3x+2y)^2 > \log_2 2^5 + \log_2 xy$$
$$\log_2(3x+2y)^2 > \log_2 32xy$$
$$(3x+2y)^2 > 32xy$$
$$9x^2+12xy+4y^2-32xy>0$$
$$9x^2-20xy+4y^2>0$$
$$(9x-2y)(x-2y)>0$$
$$(9x-2y>0 \text{ かつ } x-2y>0) \text{ または } (9x-2y<0 \text{ かつ } x-2y<0)$$

$x>0,\ y>0$ を考え図示すると、求める領域は以下のようになる



境界は含まない

今回の問題はどうだったでしょうか？丁寧に考えたらそれほど難しい問題ではありません。「難しい」と思いこんで頭がパニックになる人もいますが、そういう人は「丁寧に、丁寧に」と自分に言い聞かせるように解いたらミスが減ると思います。それでは、がんばってください。

河見賢司

高校数学の勉強法
http://www.hmg-gen.com/

感想はこちらまでメールをください（何か言ってもらえると嬉しいです）
magdai@hmg-gen.com