問題

Oを原点とする。放物線$y = x^2$上に２点$P(p,\ p^2),\ Q(q,\ q^2)$がある。ただし、$p < 0 < q$とする。$\overrightarrow{\mathrm{OP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OQ}} = 2$が成り立つとき、次の問いに答えよ

(1) pとqの積pqの値を求めよ

(2) $\triangle\mathrm{OPQ}$の面積の最小値、および最小値をとるときの$p,\ q$の値を求めよ

【解説】

２００８年の和歌山大学の過去問で、平面ベクトルと相加相乗平均を使って解く問題です。受験問題としてはごくごく基本的な内容ですが、ベクトルをつい最近勉強をしたという人にとっては難しいかもしれません。まずは、こういった基本的な問題を確実に解けるようになってください。

【(１)の解説】

ただ単に内積を使うだけです。内積については忘れている人もいるかもしれませんが、成分が与えれらているときは、以下の公式を使います。覚えておいてください。

内積(成分)

$\vec{a} = (x_1,\ y_1),\ \ \vec{b} = (x_2,\ y_2)$のとき、

$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2$である。

【(１)の解答】

$\overrightarrow{\mathrm{OP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OQ}} = 2$より

$pq + (pq)^2 = 2$ ◀ 内積の公式より

$(pq)^2 + pq - 2 = 0$

$(pq-1)(pq+2) = 0$

$\therefore\ pq = -2,\ 1$

ここで、$p < 0 < q$より$pq < 0$となる。よって、$pq = -2$

(注)

$(pq)^2 + pq - 2 = 0$

$(pq-1)(pq+2) = 0$

「見たら分かるけど、こんなの一人ではなかなか思いつけないよ」そう思っている人も

いると思います。

確かに難しいですけど、今回は pq の値を求めなさいという問題です。と言うことは pq の関係式があったらいいよね (だって pq について解けば pq の値を求められる！)。

「どこかに pq の式はできないかな？」なんて頭に入れながら見ます。最初のうちは難しいけど、慣れてきたらすぐに見つけられるようになると思いますよ。

それから、$pq = 1, -2$ 両方とも答えにしちゃった人もいると思います。絶対とは言えないけど、数学って複数の答えが出ることって本当に少ないです。ですから 2 個以上出てきたときは、「ちゃんと条件を満たしているかな？」と考えるようにしてください。条件を満たしている答えはひとつのみって言うことが多いです。これは意外に忘れやすいので気をつけてください

【(2) の解説】
この問題は、**座標が与えられている三角形の面積の問題**です。こういったときは、以下の三角形の公式がすぐに頭に浮かぶようにしておいてください。

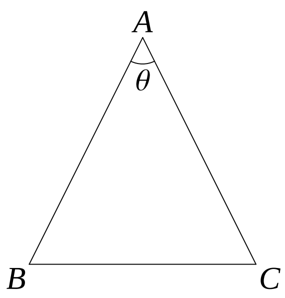
三角形の面積 (座標が与えられているとき)

$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (a, b)$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}} = (c, d)$ のとき、三角形 ABC の面積を S とすると

$S = \dfrac{1}{2}|ad - bc|$ である。

上記の証明は以下のようにしたら簡単にできますよ。ただ、三角形の面積を求めよという問題で座標が与えられているときは、すぐに「この公式を使うんだな」ということが頭に浮かぶようにしておいてください。

証明



$$S = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|\sin\theta$$ ◀ 三角形の面積の公式 $S = \frac{1}{2}ab\sin\theta$ をベクトル表記した

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|^2\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|^2\sin^2\theta}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|^2\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|^2(1-\cos^2\theta)}$$ ◀ $\sin^2\theta = 1-\cos^2\theta$ より

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|^2\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|^2 - \left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|^2\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|^2\cos^2\theta}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|^2\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|^2 - \left(\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|\cos\theta\right)^2}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|^2\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|^2 - \left(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right)^2}$$ ◀ 内積の公式 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}} = |AB|\,|AC|\cos\theta$ より

ここで、$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (a, b)$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}} = (c, d)$ とする。

このとき、$\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|^2 = a^2 + b^2$, $\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|^2 = c^2 + b^2$, $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}} = ac + bd$ となる。

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|^2\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|^2 - \left(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right)^2$$

$$=(a^2+b^2)(c^2+d^2)-(ac+bd)^2$$

$$=a^2c^2+a^2d^2+b^2c^2+b^2d^2-a^2c^2-2abcd-b^2d^2$$

$$=a^2d^2-2abcd+b^2c^2$$

$$=(ad-bc)^2$$

よって、

$$S = \frac{1}{2}\sqrt{\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|^2\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|^2 - \left(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{(ad-bc)^2}$$

$$= \frac{1}{2}|ad-bc|$$ ◀ 公式が導けた！ちなみに $\sqrt{A^2} = A$ じゃなくて $\sqrt{A^2} = |A|$ です

証明は少し長かったけど、やっていること自体は簡単ですよ。ちなみに、途中の式 $S = \frac{1}{2}\sqrt{\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|^2\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|^2 - \left(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right)^2}$ は、ベクトルの三角形の公式と呼ばれるものです。

今やったように $S = \frac{1}{2}ab\sin\theta$ の公式から簡単に導けるので、「覚えたくない」という人は出題頻度もそれほど高くないし、別に覚えなくてもいいと思います。必要になったらその都度導いてください。

ただ、$S = \frac{1}{2}|ad - bc|$ の公式は導くのが少し面倒なので、必ず暗記しておいてください。

それでは、問題に戻ります。今回は $\triangle$OPQ の面積を求めよという問題で、$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = (p,\ p^2)$, $\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = (q,\ q^2)$ なので、先ほどの面積の公式より $\triangle$OPQ の面積 S は $S = \frac{1}{2}|pq^2 - p^2q|$ となります。

ここからは、$S = \frac{1}{2}|pq^2 - p^2q|$ の最小値を求めるだけの問題です。ここから、どうするかというと、**数学で文字の数を減らせるときは、文字の数を減らす**という鉄則に従って、(1) の $pq = -2$ より $p = -\frac{2}{q}$ として、p を消去します。

今回の問題では p も q もどちらも消去することができますが、p を消去した理由は p が負で、q が正という条件があるからです。

負よりも正の方が考えやすいよね？だから、考えにくい p を消去して q のみの式にしました。

(注) この問題程度ならどちらの文字を消去しても大差ありませんが、どの文字を消すかでその後の考えやすさや計算量が大幅に変わってくるということもあります。

文字を消す時は、「どの文字を消したらいいんだろう」と常に考えるようにしておいてください。

それでは、$S = \frac{1}{2}|pq^2 - p^2q|$ に $p = -\frac{2}{q}$ を代入して p を消去していきます。

$$
\begin{aligned}
S &= \frac{1}{2}|pq^2 - p^2q| \\
&= \frac{1}{2}\left| -\frac{2}{q}q^2 - \left(-\frac{2}{q}\right)^2 q \right| \\
&= \frac{1}{2}\left| -2q - \frac{4}{q} \right|
\end{aligned}
$$

ここで、絶対値の中身は$-2q-\dfrac{4}{q} = -\left(2q+\dfrac{4}{q}\right)$となりますが、$q>0$より当然$2q+\dfrac{4}{q}>0$が言えて、$-\left(2q+\dfrac{4}{q}\right)<0$となります。

よって、

$$
\begin{aligned}
S &= \frac{1}{2}\left| -2q - \frac{4}{q} \right| \\
&= \frac{1}{2}\left| -\left(2q + \frac{4}{q}\right)\right| \\
&= \frac{1}{2}\cdot\left(2q + \frac{4}{q}\right) \\
&= q + \frac{2}{q}
\end{aligned}
$$

上記の式変形が分からないという人は以下を見てください。

ルートの性質と外し方

$|AB| = |A||B|$

$\left|\dfrac{A}{B}\right| = \dfrac{|A|}{|B|}$

$|-A| = |A|$

$$\sqrt{A^2} = |A| = \begin{cases} A \ \ (A \geqq 0) \\ -A \ (A < 0) \end{cases}$$

ちなみに$|-A| = |A|$は以下のようにしたら導くことができます。

$$|-A|$$
$$=|-1\times A|$$
$$=|-1||A|$$
$$=|A|$$

それでは、先ほどの式変形をもう少し丁寧にしてみたいと思います。

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}\left|-2q-\frac{4}{q}\right| \\ &= \frac{1}{2}\left|-\left(2q+\frac{4}{q}\right)\right| \\ &= \frac{1}{2}\cdot\left|2q+\frac{4}{q}\right| \quad \blacktriangleleft\ |-A|=|A| \text{ の公式より} \\ &= \frac{1}{2}\cdot\left(2q+\frac{4}{q}\right) \quad \left(\because\ 2q+\frac{4}{q}>0\right) \end{aligned}$$

ちなみに、上記の $\because$ は英語で書くと「because」で、「なぜなら」という意味です。後から説明をするときによく使う記号です。知らない人がたまにいるので、一応書いておきました。

で、ここからどうするかと言うと相加相乗平均です。相加相乗平均は本当によく出てきます。相加相乗平均のことをそれほど知らない、
という人は http://www.hmg-gen.com/situmon/tsuugaku2B/2B-3.html を見てください。

「相加相乗平均くらい知ってるよ」という人も、「分数関数の最大値、最小値問題は相加相乗平均を利用する」この意味の分からない人はぜひとも見るようにしてください。

それでは、(2) の解答に進みたいと思います。

【(2) の解答】
△OPQ の面積を S とすると、

$S = \frac{1}{2}|pq^2 - p^2q|$

$p = -\frac{2}{q}$ を代入して

$= \frac{1}{2}\left| -\frac{2}{q}q^2 - \left(-\frac{2}{q}\right)^2 q \right|$

$= \frac{1}{2}\left| -2q - \frac{4}{q} \right|$

$= \frac{1}{2}\left| -2q - \frac{4}{q} \right|$

$= \frac{1}{2}\left| -\left(2q + \frac{4}{q}\right) \right|$

$= \frac{1}{2} \cdot \left(2q + \frac{4}{q}\right)$

$= q + \frac{2}{q}$

$q > 0$ より、$q + \frac{2}{q} \geqq 2\sqrt{q \cdot \frac{2}{q}} = 2\sqrt{2}$ が言える。

等号は $q = \frac{2}{q}$ つまり $q = \sqrt{2}$ のときに成立するので、S は最小値 $2\sqrt{2}$ をとる。

また、$p = -\frac{2}{q}$ より、このとき $p = -\sqrt{2}$ となる。

今回の問題はどうだったでしょうか？あまり受験問題に慣れていない人のためにかなり詳しく解説を書きました。数学の問題は一見難しそうに感じるかもしれませんが、少しずつばらしながら丁寧に考えていくとそれほど難しくありません。とにかく丁寧に、丁寧に問題を解いていくようにしてください。それでは、がんばってください。

河見賢司

高校数学の勉強法
http://www.hmg-gen.com/

感想はこちらまでメールをください（何か言ってもらえると嬉しいです）
magdai@hmg-gen.com

大好評の無料メルマガ
「**高校数学の達人・河見賢司のメルマガ**」は以下から登録できます。
http://www.hmg-gen.com/merumagatouroku.html