

問題

次の等式を満たす実数 x をすべて求めよ。

$$\int_0^x t^2 \sin(x-t) dt = x^2$$

【解説】

2008年のお茶の水女子大学の過去問です。単なる定積分を解くだけの問題ですが、ややこしいです。丁寧に解いていかないと間違ってしまう。

受験会場ではどうしても緊張してしまいます。ただ、緊張して間違っているのは仕方がないです。何度も何度も解いて緊張していても大丈夫！そのくらいのレベルになるまで繰り返し練習をしておいてください。

それでは、問題に進みます。

【解説】

$\int_0^x t^2 \sin(x-t) dt = x^2$ まず、よく分かんないけど、とりあえずインテグラルがあつてはダメなので、左辺のインテグラルをなくす方向で考えます。

$\int_0^x t^2 \sin(x-t) dt$ ですが、これはこのまま部分積分ができます。どうしても間違いやすいという人は、 $x-t=u$ とでも置換して解いてもいいと思いますが、置換すると面倒になるので今回はこのまま解いていきます。それでは、部分積分に進みたいと思います。

$$\begin{aligned} & \int_0^x t^2 \sin(x-t) dt \\ &= \int_0^x t^2 ((\cos(x-t)))' dt \end{aligned}$$

上記の式変形が少し分かりにくいというか、「ひょっとして間違っているのでは？」と思う人もいるかもしれませんが、確かに、間違いやすいんですけど次のことを考えたら分かると思いますよ。

微分の公式

$$\frac{d}{dt} \cos f(t) = -\sin f(t) \cdot f'(t)$$

上記より、 $\cos(x-t)$ を t について微分をしてみます。すると $\sin(x-t) \cdot (x-t)' = -\sin(x-t) \cdot (-1) = \sin(x-t)$ となります。今回の場合 $(x-t)'$ は t で微分をするので当然 $(x-t)' = -1$ です。少し間違いやすいので注意してくださいね。

上記で以下の式変形が成り立っているということを理解できると思います。

$$\begin{aligned} & \int_0^x t^2 \sin(x-t) dt \\ &= \int_0^x t^2 ((\cos(x-t))' dt \end{aligned}$$

で、ここからは部分積分をしていきます。

$$\begin{aligned} & \int_0^x t^2 \sin(x-t) dt \\ &= \int_0^x t^2 ((\cos(x-t))' dt \\ &= \left[t^2 \cos(x-t) \right]_0^x - \int_0^x 2t \cdot \cos(x-t) dt \end{aligned}$$

ここから、 $\left[t^2 \cos(x-t) \right]_0^x$ と $\int_0^x 2t \cdot \cos(x-t) dt$ を別々に考えていこうとおもいます。まず、 $\left[t^2 \cos(x-t) \right]_0^x$ ですが、

$$\begin{aligned} & \left[t^2 \cos(x-t) \right]_0^x \\ &= x^2 \cos(x-x) - 0^2 \cos(0-t) \\ &= x^2 \end{aligned}$$

次に、 $\int_0^x 2t \cdot \cos(x-t) dt$ を求めます。これは、また部分積分です。先ほどと同じように考えていきます。

$$\begin{aligned}
& \int_0^x 2t \cdot \cos(x-t) dt \\
&= \int_0^x 2t \cdot (-\sin(x-t))' dt \\
&= \left[-2t \sin(x-t) \right]_0^x - \int_0^x (2t)'(-\sin(x-t)) dt \\
&= \left[-2t \sin(x-t) \right]_0^x + 2 \int_0^x \sin(x-t) dt \\
&= \left[-2t \sin(x-t) \right]_0^x + 2 \left[\cos(x-t) \right]_0^x \\
&= -2x \sin(x-x) - 2 \cdot 0 \sin(x-0) + 2(\cos(x-x) - \cos(x-0)) \\
&= 2(1 - \cos x)
\end{aligned}$$

以上より、左辺は以下のようになります。

$$\begin{aligned}
& \int_0^x t^2 \sin(x-t) dt \\
&= \int_0^x t^2 ((\cos(x-t))' dt \\
&= \left[t^2 \cos(x-t) \right]_0^x - \int_0^x 2t \cdot \cos(x-t) dt \\
&= x^2 - 2(1 - \cos x)
\end{aligned}$$

ここまで少し大変でしたが、やっていることは丁寧に部分積分をただけです。間違いやすいのでとにかく丁寧に、丁寧に考えるようにしておいてください。ここからは、簡単です。

$$\begin{aligned}
& \int_0^x t^2 \sin(x-t) dt = x^2 \\
&\Leftrightarrow x^2 - 2(1 - \cos x) = x^2 \\
&\Leftrightarrow -2(1 - \cos x) = 0 \\
&\Leftrightarrow 1 - \cos x = 0 \\
&\Leftrightarrow \cos x = 1
\end{aligned}$$

$\cos x = 1$ を満たす実数は、 $x = 2n\pi$ (ただし n は任意の整数) です。

今回の問題のポイントとしては、「とにかく計算ミスをしないこと」です。普段、高校生に接していてこの定積分の計算が苦手と言う人が多いです。

苦手といわないまでも、解くのに時間がかかる人がいます。定積分の計算は、いろいろありますが、そのすべてを暗記してください。そして、自由自在に使いこなせるようになっておかないと実際の大学受験では少し厳しくなります。

今回の問題も、かなり間違いやすい問題だったと思います。そんな問題でも自信をもって解けるようになるまで、教科書等で定積分の勉強をしておいてください。

それでは、がんばってください。

河見賢司

高校数学の勉強法

<http://www.hmg-gen.com/>

感想はこちらまでメールをください (何か言ってもらえると嬉しいです)

magdai@hmg-gen.com

大好評の無料メルマガ

「高校数学の達人・河見賢司のメルマガ」は以下から登録できます。

<http://www.hmg-gen.com/merumagatouroku.html>