

問題

a を実数とし、関数 $f(x) = x^2 - 2ax + (2a + 1)(a - 1)$ の最小値を m とする。方程式 $f(x) = 0$ が異なる 2 つの実数解 $\alpha, \beta (\alpha < \beta)$ をもつとき、次の問いに答えよ。

- (1) m を a で表せ
- (2) α, β が $\alpha < 1 < \beta$ を満たすとき、 a のとりうる値の範囲を求めよ
- (3) a が (2) で求めた範囲を動くとき、 m のとりうる値の範囲を求めよ

【解説】

2008年の岩手大学の教育学部の問題です。問題のレベルとしてはごくごく基本的なものです。

大学受験と聞くと難しく感じる人もいるかもしれませんが、そんなことなくほとんどの問題は基本的です。普段の勉強でもいたずらに難しい問題を解くのではなく、まずは基本レベルの問題を完璧にできるようになるまで繰り返すようにしておいてください。それでは、問題に進みます。

【(1)の解説】

最小値を求めよという問題です。関数の最大値・最小値問題ではグラフをかいて考えるということが基本です。

今回の問題は2次関数です。2次関数では、グラフをかくためには頂点を求める必要があります。ですから、平方完成をして頂点を求めないといけません。

少し余談ですけど、2次関数の問題を見ると何がなんでも平方完成をする人がいます。たしかに2次関数の問題のときは平方完成をすることが多いですが、必ず平方完成をするわけではありません。

平方完成をするのは、「頂点を求める」「グラフをかくとき」だけです。それ以外のときは平方完成をする必要はありません。問題を解くときは、「自分がなぜそういうふうな式変形をしたか？」という根拠をもって式変形をするようにしてください。無闇に解いていても、なかなかできるようにはなりません。

【(1)の解答】

$$\begin{aligned}
 f(x) &= x^2 - 2ax + (2a + 1)(a - 1) \\
 &= (x - a)^2 - a^2 + 2a^2 - a - 1 \\
 &= (x - a)^2 + a^2 - a - 1
 \end{aligned}$$

よって、 $f(x)$ は $x = a$ のとき最小値 $m = a^2 - a - 1$ をとる。

(注) さっき「最大値、最小値問題ではグラフをかく」といいました。今回もグラフをかいてもいいけど、今回は下に凸な2次関数で x はすべての値の範囲なので頂点のとき最小値ってなるのはあきらかだよな？別にグラフをかいてもいいけど、このくらいだったらグラフはかかなくてかまいません

【(2)の解説】

これは、「2次関数の解の配置に関する問題」です。

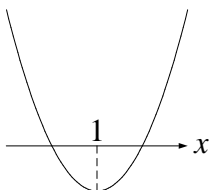
2次関数の解の配置に関する問題は、以下のページで詳しく解説しています。もし、今回の問題が分からないというのなら、以下のページを読んでください(かなり詳しく解説しました。できたら全員に読んで欲しい内容です)

<http://www.hmg-gen.com/2jino9.pdf>

少し考えて欲しいんだけど、今回の問題は、「2解 α, β が $\alpha < 1 < \beta$ をみたす」つまり、2解のうちひとつが1より大きい解で、もうひとつが1より小さい解ということです。

今回も「解の配置の問題」ですから、判・軸・端に着目して解いていきます。ですが、今回は判・軸は必要なく端だけで十分です。 $f(1) < 0$ だけでOKです。

今回は、下に凸な2次関数です。 $f(1) < 0$ となった時点で、グラフとしては絶対に以下のようにしてくれます。



↑上図のように $x = 1$ における y 座標が負だったら、絶対に $x = 1$ の前後で2解をもってくれるよね

【解答】

$$\begin{aligned}f(1) &= 1 - 2a + (2a + 1)(a - 1) \\ &= 1 - 2a + 2a^2 - a - 1 \\ &= 2a^2 - 3a\end{aligned}$$

題意をみたすには、 $f(1) < 0$ であればよいので

$$\begin{aligned}f(1) &= 2a^2 - 3a < 0 \\ a(2a - 3) &< 0 \\ 0 < a < \frac{3}{2} &\leftarrow \text{これが答え}\end{aligned}$$

【(3)の解説】

先ほど、「最大値・最小値問題ではグラフをかいて考える」と言いましたが、今回の範囲を考える問題も最大値・最小値を求めるのと同じようなものなのでグラフをかいて考えていきます。

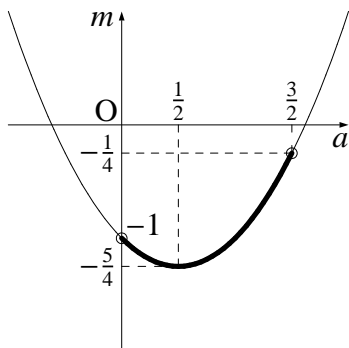
今回の問題は(1),(2)の結果を使うだけなのでごくごく簡単です。

【(3)の解答】

(1)より、

$$\begin{aligned}m &= a^2 - a - 1 \\ &= \left(a - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{3}{4} \leftarrow \text{グラフをかくために平方完成をした}\end{aligned}$$

(2)より、 $0 < a < \frac{3}{2}$ なので、グラフは以下のようなになる。



グラフより、 m のとりうる値の範囲は $-\frac{5}{4} \leq m < -\frac{1}{4}$ となる。

今回の問題はこれで終わりです。今回は2次関数の問題でしたが、2次関数は高校数学の基本です。2次関数が分からないとのちのち厳しくなるので、しっかりと復習をしておいてください。

河見賢司

高校数学の勉強法

<http://www.hmg-gen.com/>

感想はこちらまでメールをください(何か言ってもらえると嬉しいです)

magdai@hmg-gen.com

大好評の無料メルマガ

「高校数学の達人・河見賢司のメルマガ」は以下から登録できます。

<http://www.hmg-gen.com/merumagatouroku.html>