問題

関数 $f(x) = xe^x + x^2 + (2 - e^{-2})\,x$ を考える

(1) 関数 $g(x) = xe^x$ の最小値を求めよ

(2) $f''(x) > 0$ であることを示せ

(3) $f(x) = 0$ を満たす x や $f(x)$ の極値を与える x がどのような位置関係にあるかを考え、関数 $y = f(x)$ のグラフの概形をかけ

(4) 関数 $y = f(x)$ と x 軸とで囲まれた部分の面積を求めよ

【解説】
２００８年のお茶の水女子大学の過去問です。お茶の水女子大学レベルから言えば標準的な問題です。お茶の水女子大学を目指している人はこのくらいの問題を当たり前のようにとけるようになっておいてください。

【(１)の解説】
これは、単に微分をするだけです。

【(２)の解答】

$$g(x) = xe^x$$
$$= e^x + xe^x$$
$$= e^x(1 + x)$$

よって増減表をかくと ◄ (注) を見よ

x		-1	
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	↘	$-\frac{1}{e}$	↗

よって、増減表より $x = -1$ のときに最小値 $-\frac{1}{e}$ をとる

【(注) について】
$g'(x)$ について知らない人が多いので、$g'(x)$ を説明しておきたいと思います。まず、次のことを覚えておいてください。

グラフの増減について

$f'(x)>0$ のとき、グラフは増加関数である。

$f'(x)<0$ のとき、グラフは減少関数である。

上記のことより、**微分をしたときに知りたいことは、$f'(x)$ の正負だけ**です。それ以外のことは必要ありません。

繰り返しになりますが、微分をしたいときに知りたいことは微分の正負だけです。今回の問題では $g'(x)=e^x(1+x)$ でした、e^x は x の値にかかわらず常に正です。ということは、$g'(x)$ の正負は $1+x$ の正負と一致します。$1+x$ は $x<-1$ で負、$x>-1$ で正となります。

当たり前のことですが、このあたりのことが理解できていない人が意外なほど多いです。しっかりと理解しておいてください。

【(2)の解説】
この問題に入る前にまずは次のことを覚えておいてください。

受験問題の考え方

大学受験の問題で (1),(2),$\cdots$ となっていたら前問の結果を使って解いていく (ヒントにする) ことが多い！

特に (1),(2) が似ている形をしているとき、(1) が設問として設定するにはあまりに簡単なとき、こういったときはまず間違いなく前問の結果を使います

今回の問題も (1) は、大学受験の問題としてはごくごく簡単だったよね？だから、おそらくこの (2) を解くときに、(1) の結果を使います。それでは、問題に進みます。

【解答】

$$f(x)=xe^x+x^2+(2-e^{-2})x$$

$$f'(x)=e^x+xe^x+2x+2-e^{-2}$$

$$\begin{aligned}f''(x)&=e^x+e^x+xe^x+2\\&=xe^x+2e^x+2\end{aligned}$$

ここで、(1) より $xe^x\geqq-\dfrac{1}{e}$ と $e^x>0$ を考え

$$f''(x)>-\frac{1}{e}+2>0_{//}$$

(注) 今回は $f''(x) = xe^x + 2e^x + 2$ が 0 より大きいことを示せという問題です。

こういった問題の多くは $f''(x)$ のグラフをかき、それの最小値が 0 より大きいということを使って示します。ただ、今回の問題はそのように解くのではなく (1) の結果を使って解いていきました。

このように前問の結果を使うということは本当に多いので注意するようにしておいてください。

【(3) の解説】
とりあえずグラフをかかないといけないけど、まずは次の事柄を覚えておいてください。

グラフの凸性

$f''(x) > 0$ のとき、グラフは下に凸である。

$f''(x) < 0$ のとき、グラフは上に凸である。

⇑ これは知らない人が多いですが、意外によくでてきますよ。もし忘れていた人は覚えておいてくださいね。

それでは、問題に進もうと思います。今回は少し変わった問題ですが、当たり前ですけど**数学は問題文に従って問題を解いて**いきます。

今回も問題文に従って問題を解こうと思いますが、まずは「$f(x) = 0$ を満たす x」から求めていくことにします。$f(x) = 0$ を満たす x を求めるには、当たり前ですが方程式 $xe^x + x^2 + (2 - e^{-2})x = 0$ を解けばＯＫです。

すべての項に x が含まれているので、x でくくることができます。

$$xe^x + x^2 + (2 - e^{-2})x = 0$$

$$x(e^x + x + 2 - e^{-2}) = 0$$

$$\therefore\ x = 0 \text{ または } e^x + x + 2 - e^{-2} = 0$$

上記のようになります。これより解は $x = 0$ と $e^x + x + 2 - e^{-2} = 0$ の解は $x = -2$ です。

$e^x + x + 2 - e^{-2} = 0$ の解が $x = -2$ ってなることが分からないという人がいると思います。そういう人は、$e^x + x + 2 - e^{-2}$ に $x = -2$ を代入してみてください。そうすると、確かに 0 となっていることが確認できると思いますよ。

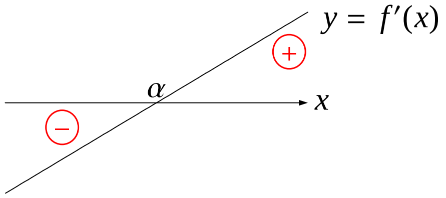
こういうふうな方程式ですが、頻出という訳ではありませんが、ごくたまに出てきます。今回は問題文に、「$f(x)=0$ を満たす x」と書いてくれているんだよね。この表現を見て「ああ、この方程式は解くことができるんだな」と気づけるようになっておいて欲しいです。

なお、面積を求めるには交点が必要です。ですが、問題によっては交点を求められないときもあります。そういったときは、交点の x 座標を α とでもおいて解いていくことが多いです。α を使って計算をしておくと最終的に消えてくれるということが多いです。

それでは、問題に進みます。次に「$f(x)$ の極値を与える x がどのような位置関係にあるか」ということを考えていきます。先ほどは、「$f(x)=0$ を満たす x」と書かれていたので具体的な x の値を求めましたが、今回は「どのような位置関係にあるか」です。この表現から「ああ、極値は具体的な数値を求めることは無理だな」と気づけるようになっておいてください。

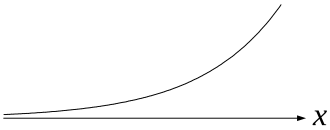
$$
\begin{aligned}
f(x) &= xe^x + x^2 + (2-e^{-2})x \\
f'(x) &= e^x + xe^x + 2x + 2 - e^{-2} \\
&= (x+1)e^x + 2x + (2-e^{-2})
\end{aligned}
$$

とりあえず、ここまできました。(2) を思い出して欲しいのですが $f''(x)>0$ でした。ということは $f'(x)$ は増加関数です。このことを頭にいれて $f'(x)$ のグラフを簡単にかくと次のようになります。



⇑ $f'(x)$ は単調増加なグラフ。そのことを考えて図示すると上記のようになる。上記のようになった場合 $x=\alpha$ が $f'(x)$ の正負の変わり目。つまり極値 (極小値) になる

今回は $f'(x)$ が増加関数という理由だけでグラフをかきました、もちろんこの条件だけなら次のようになることも考えられます。



上図のようになったときも $f'(x)$ は単調増加という条件を満たしています。ですから、極値を持つためには $f'(x) < 0$ となるような x が存在しないといけないよね。そこで $f'(x)$ に $x = -1,\ 0$ を代入してみます。

$x = -1,\ 0$ を代入する理由なんですけど、適当です。慣れてきたらすぐに気づけるんですけど、**数学っていうのは一般的に項の数が少ないほど考えやすい**です。$f'(x) = (x+1)e^x + 2x + (2 - e^{-2})$ だけど、$x = -1$ や $x = 0$ を代入すると項の数が少なくなって考えやすくなるよね。だから、$x = -1,\ 0$ を代入します。

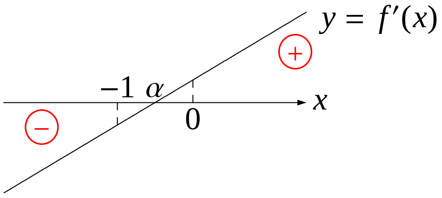
数学は項の数が多いほど考えにくいって言ったけど、その他にも「文字が多ければ考えにくい」「次数が高いほど考えにく」といった事柄もあります。

とにかく考えやすいように、考えやすいようにもっていくと自然と解けてしまいます。重要ですので、覚えておいてください。

$$
\begin{aligned}
f'(-1) &= (-1+1)e^{-1} + 2\cdot(-1) + 2 - e^{-2} \\
&= -2 + 2 - \frac{1}{e^2} \\
&= -\frac{1}{e^2} < 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f'(0) &= (0+1)e^0 + 2\cdot 0 + 2 - e^{-2} \\
&= 3 - \frac{1}{e^2} > 0
\end{aligned}
$$

このことより次のようになることが分かりました。



$f'(x)$ は $x < \alpha$ で負となり、$x > \alpha$ で正となる。また、α は $-1 < \alpha < 0$ を満たす。

ここまできたらグラフをかくことができます。それでは、解答に進みたいと思います。

【(3) の解答】

$f(x) = xe^x + x^2 + (2 - e^{-2})x = 0$

$x(e^x + x + 2 - e^{-2}) = 0$

$\therefore\ x = 0$ または $e^x + x + 2 - e^{-2} = 0$

よって、$x = -1, 0$

$f(x) = xe^x + x^2 + (2 - e^{-2})x$

$f'(x) = e^x + xe^x + 2x + 2 - e^{-2}$

$= (x+1)e^x + 2x + (2 - e^{-2})$

$f'(-1) = (-1+1)e^{-1} + 2\cdot(-1) + 2 - e^{-2}$

$= -2 + 2 - \dfrac{1}{e^2}$

$= -\dfrac{1}{e^2} < 0$

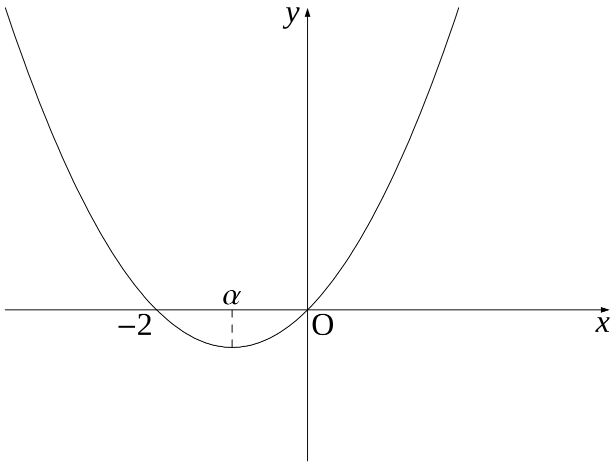
$f'(0) = (0+1)e^0 + 2\cdot 0 + 2 - e^{-2}$

$= 3 - \dfrac{1}{e^2} > 0$

α を $f'(\alpha) = 0$ とする。(2) と $f''(x) > 0$ であることと $f'(-1) < 0,\ f(0) > 0$ をあることより、$-1 < \alpha < 0$ を満たす。以上のことを考えて増減表をかくと

x		α	
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	$\searrow$		$\nearrow$

また、(2) より $f''(x) > 0$ より、$y = f(x)$ は下に凸な関数である。以上のことを踏まえグラフをかくと次のようになる。



【(4) の解説】
これはただ単に部分積分をするだけです。解答に進みます。

【(4) の解答】
求める部分の面積を S とする。

$S = \displaystyle\int_{-2}^{0} -\left\{xe^x + x^2 + (2-e^{-2})x\right\} dx$ となる。

ここで、

$\displaystyle\int xe^x\,dx$

$=\displaystyle\int x(e^x)'\,dx$

$=xe^x - \displaystyle\int e^x\,dx$

$=xe^x - e^x$

$$S = \int_{-2}^{0} -(xe^x + x^2 + (2-e^{-2})x)\,dx$$
$$= \left[-xe^x + e^x - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}(2-e^{-2})x^2 \right]_{-2}^{0}$$
$$= \left\{ -0 \cdot e^0 + e^0 - \frac{1}{3} \cdot 0^3 - \frac{1}{2}(2-e^{-2})0^2 \right\} - \left\{ 2e^{-2} + e^{-2} - \frac{1}{3} \cdot (-2)^3 - \frac{1}{2}(2-e^{-2})(-2)^2 \right\}$$
$$= 1 - 2e^{-2} - e^{-2} - \frac{8}{3} + 2(2-e^{-2})$$
$$= \frac{7}{3} - 5e^{-2}$$
$$= \frac{7}{3} - \frac{5}{e^2}$$ ◀ これが答え

今回の問題はどうだったでしょうか？国公立大学の２次試験としては標準的な問題です。
この程度の問題をサクサクと解けるようになるまで練習をしておいてください。

河見賢司

高校数学の勉強法
http://www.hmg-gen.com/

感想はこちらまでメールをください（何か言ってもらえると嬉しいです）
magdai@hmg-gen.com