問題

θを$0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$とする。座標平面上に３点$O(0,\ 0),\ A(\cos\theta,\ 0),\ B(0,\ \sin\theta)$をとる。このとき、次の問いに答えよ。

(1) 線分$OA,\ OB$の長さの和の最大値とそのときのθを求めよ

(2) 三角形OABの面積の最大値とそのときのθを求めよ

【解説】

２００８年の新潟大学の文系学部の入試問題で、三角関数の最大値、最小値の問題です。問題の難易度としてはごくごく簡単なものです。数学の苦手な人はまずこのくらいの問題を確実に解けるようになっておいてください。

【(１)の解説】

$OA = \cos\theta,\ OB = \sin\theta$ということはすぐにわかると思います。よって$OA$と$OB$の長さの和は、$\sin\theta + \cos\theta$で表すことができます。

$\sin\theta + \cos\theta$の形がでてきたら「**あっ、合成したらいいんだな**」ということにすぐに気づけるようにしておいて欲しいです。

$\sin\theta + \cos\theta$を合成すると$\sqrt{2}\sin\left(\theta + \dfrac{\pi}{4}\right)$となります。もし、合成について知らないという人がいたら、http://www.hmg-gen.com/sankaku10.pdf に詳しく解説しています。

で、ここからなんですが「**関数の最大値、最小値問題はグラフをかいて考える**」ということが鉄則です。そこで、$y = \sin\left(\theta + \dfrac{\pi}{4}\right)$のグラフをかいたらいいんだけど、これって少し面倒だよね。

$y = \sin\left(\theta + \dfrac{\pi}{4}\right)$のグラフなら$y = \sin\theta$のグラフを$\theta$軸方向に$-\dfrac{\pi}{4}$平行移動したらいいだけだからかけないこともないんだけど、他の問題ではもっともっと複雑なグラフが出ることがあります。そういった複雑なものでも解けるようにあえて文字を置き換えてといていきたいと思います。

まず、$y=\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)$ のグラフなんだけど、仮に $\theta+\frac{\pi}{4}=X$ なんておいたら、求めるグラフは $y=\sin X$ ってなるから簡単にグラフをかけるよね。グラフが簡単にかけるからいいんだけど、文字を置き換えたときには注意点があります。

文字を置き換えたときの注意点

文字を置き換えたときは、必ず置き換えて文字の値の範囲に注意する

上記はどういうことかと言うと、今回は $\theta+\frac{\pi}{2}=X$ と置き換えました。もともとの θ には $0<\theta<\frac{\pi}{2}$ という範囲があります。

$0<\theta<\frac{\pi}{2}$

$\frac{\pi}{4}<\theta+\frac{\pi}{4}<\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}$ ◀ すべての辺に $\frac{\pi}{4}$ を加えた

$\frac{\pi}{4}<X<\frac{3}{4}\pi$ ◀ $\theta+\frac{\pi}{4}=X$ より、これで X の値の範囲が求まった！

上記のようにすることで、X の値の範囲を求めることができました。これは本当に重要です。「**文字を置き換えたときは範囲に注意**」このことを絶対に頭にいれておくようにしてください。

以上のことより、$0<\theta<\frac{\pi}{2}$ における $y=\sin\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)$ の最大値と最小値は、$\frac{\pi}{4}<X<\frac{3}{4}\pi$ における $y=\sin X$ の最大値と最小値に一致するということが分かります。後者の最大値、最小値の方が圧倒的に簡単に求めることができるよね。これが文字の置き換えを使った最大値、最小値問題です。しっかりと理解しておいてくださいね。

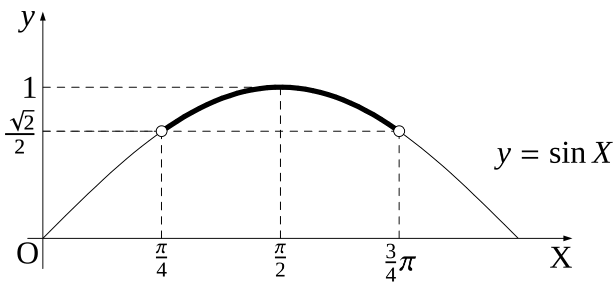
【(1)の解答】
$OA=\cos\theta,\ OB=\sin\theta$ より、$OA+OB=\sin\theta+\cos\theta$ となる。

$\sin\theta+\cos\theta$

$=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)$

ここで $\theta+\frac{\pi}{4}=X$ とおく。$0<\theta<\frac{\pi}{2}$ より $\frac{\pi}{4}<X<\frac{3}{4}\pi$ がいえる

$=\sqrt{2}\sin X$



グラフより、$X = \dfrac{\pi}{2}$ のとき $\sin X$ の最大値 1。

$X = \dfrac{\pi}{2}$ のとき、$\theta = \dfrac{\pi}{4}$

以上より、$OA + OB$ は $\theta = \dfrac{\pi}{4}$ のとき最大値 $\sqrt{2}$ をとる。

【(2)の解説】
三角形の面積ですが、(底辺)×(高さ)÷2 で求めることができます。三角形 OAB で底辺を OA とすると高さが OB なので、求める三角形の面積 S は $S = \dfrac{1}{2}\sin\theta\cos\theta$ となります。

ここまでは、ほとんどの人ができると思うけど、この先どうするか分かるかな？そこで、まずは最大値、最小値問題の鉄則を思い出して欲しんだけど、それは「**最大値、最小値問題はグラフをかいて考える**」だったよね。

この鉄則ののっとって $S = \dfrac{1}{2}\sin\theta\cos\theta$ のグラフをかこうかな？と思うんだけど、こんなグラフかけないよね …

そこで、思い出さないといけないのは２倍角の公式です。$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$ です。これより、$S = \dfrac{1}{4}\sin 2\theta$ だよね。これだったら、グラフをかけるんじゃない？

これはよく出てくる式変形なのですぐに気づけるようになっておいてくださいね。

$S = \dfrac{1}{4}\sin 2\theta$ のグラフだったらかけるけど、これはまだ面倒です。そこで、(1)と同じようにして $2\theta = X$ とでも置き換えて解いていくことにします。これだったら、さらにグ

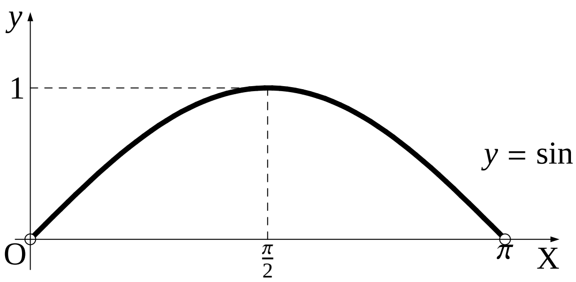
ラフがかきやすくなるよね。でも、当たり前だけど、「**文字を置き換えた時には、置き換えた文字の値の範囲に注意する**」ということを忘れないようにしてください。以上のことを踏まえ、解答に進みたいと思います。

【(2) の解答】
三角形 OAB の面積を S とする。

$S = \dfrac{1}{2}\sin\theta\cos\theta = \dfrac{1}{4}\sin 2\theta$ となる。

ここで、$2\theta = X$ とする。$0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ より $0 < X < \pi$ ◀ 文字を置き換えたときは範囲に注意する
がいえる。

$y = \sin X\ (0 < X < \pi)$ のグラフをかくと以下のようになる。



グラフより $X = \dfrac{\pi}{2}$ のときに、$\sin 2\theta$ は最大値 1 をとる。

$X = 2\theta$ より、$X = \dfrac{\pi}{2}$ のとき $\theta = \dfrac{\pi}{4}$

以上より、$\theta = \dfrac{\pi}{4}$ のとき S は最大値 $\dfrac{1}{4}$ をとる。

今回の問題はどうだったでしょうか？本当に基本的な問題ですが、普段高校生に数学を教えていてこういった問題をしっかりと理解できていない、そういう人が本当に多いです。むやみやたらに難問を解いていてもなかなかできるようになりません。まずは、こういった基本的な問題を確実に解けるようになっておいてください。それでは、がんばってください。

河見賢司

高校数学の勉強法
http://www.hmg-gen.com/

感想はこちらまでメールをください（何か言ってもらえると嬉しいです）
magdai@hmg-gen.com

大好評の無料メルマガ
「**高校数学の達人・河見賢司のメルマガ**」は以下から登録できます。
http://www.hmg-gen.com/merumagatouroku.html