「自宅に居ながら１対１の数学の授業が受けられます」の詳細は以下をクリック！
https://www.hmg-gen.com/tuusin.html

問題

座標空間において、$|x| \leqq z^2$ を満たす点 (x, y, z) 全体からなる立体を R とする。点、$(0, 0, 1)$ を通り x 軸と平行な直線を l とする。l を中心軸とする半径 1 の円柱を C とし、R と C の共通部分を T とする。

(1) $-1 < h < 1$ を満たす定数 h に対して、点 $(0, 0, 1+h)$ を通り z 軸に垂直な平面による T の切り口の面積を求めよ。
(2) T の体積を求めよ

【解説】

２００６年の筑波大学の過去問で、数学 III の非回転体の体積の問題です。体積の問題というと、回転体の体積しか知らないという人もいますが、実際の大学受験にはこういった非回転体の体積も出題されます。

こういった問題を解くことができないという人がたまにいますが、これは積分の意味を考えたら明らかです。積分の意味とは、「微小区間を足し合わせて全体を作る」ということです。この日本語の意味が分からないという人は、「積分の意味の解説プリント「https://www.hmg-gen.com/kaitou2-12.pdf 」をご覧になってください。それでは、問題に進みます。

【（１）の解説】

まず、問題文より「点 $(0, 0, 1)$ を通り x 軸に平行な直線を l とする。l を中心軸とする半径 1 の円柱を C とし」となっているけど、この円柱の C を数式で表記したらどうなるか分かる？

これは、$y^2 + (z-1)^2 = 1$ です。分かる人にとっては簡単かもしれないけど、一応説明しておきます。

まず、$x^2 + y^2 = 1$ って何を表している？と聞くと、ほとんどの人が「原点を中心とする半径が１の円」と答えると思います。

確かにそれであっているんだけど、それは xy 平面のとき、これが仮に xyz の空間座標だっ

たらどうなるか分かる？

$x^2 + y^2 = 1$っていう条件さえ満たしていたらいいんだから (つまり z はどこにあってもよい)、これって無限に続く長い円柱になるんじゃないかな？だって、$z = 0$ のときも、$x^2 + y^2 = 1$ を満たしているし、$z = 1$ のときも、$x^2 + y^2 = 1$ を満たしている、すべての z で成立しているんだから、結果として無限に続く長い円柱になるよね。

問題に戻るけど、円柱の C は $y^2 + (z-1)^2 = 1$ で表されます。ここから、問題に戻ります。T の面積を求めます。

T の切り口がどんな形になるかなんだけど、Tって点 $(0, 0, 1+h)$ を通り、z 軸に垂直な平面にあります。T のことを難しく感じる人もいますが、要するにこれは R の $|x| \leqq z^2$ と C の $y^2 + (z-1)^2 = 1$ の z に $z = 1 + h$ を代入したら OK です。

まず、R に $z = 1 + h$ を代入すると

$|x| \leqq (1+h)^2$

$-(1+h)^2 \leqq x \leqq (1+h)^2$ ◀ $A > 0$ のとき、$|x| < A \Leftrightarrow -A < x < A$ より

次に、C の z に $z = 1 + h$ を代入します。R と C の共通部分は当然 C の内部なので

$y^2 + (1+h-1)^2 \leqq 1$ ◀ $y^2 + (z-1)^2 \leqq 1$ に $z = 1 + h$ を代入した

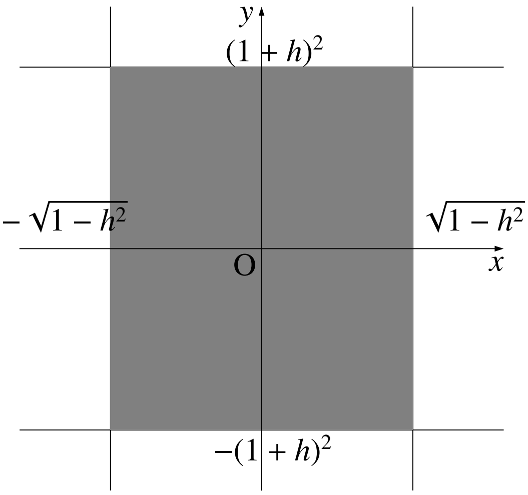
$$y^2 + (1+h-1)^2 \leqq 1$$

$$y^2 + h^2 \leqq 1$$

$$y^2 \leqq 1 - h^2$$

$$-\sqrt{1-h^2} \leqq y \leqq \sqrt{1-h^2}$$

上記のようになります。これを図示すると、以下のような長方形になります。



求める斜線部の面積は長方形です。長方形の面積は縦 × 横ということより、求める部分の面積を $S(h)$ とすると、$S(h) = 2(1+h)^2 \cdot 2\sqrt{1-h^2} = 4(1+h)^2\sqrt{1-h^2}$ となり、これが答えです。

【（２）の解説】

難しく感じるかもしれませんが、これはごくごく簡単です。

回転体の体積ですがよく $\int \pi y^2\, dx$ を公式と思っている人もいますが、これは公式ではないですよ。積分とは微小区間の体積を足し合わせたものです。$\pi y^2\, dx$ は微小区間の体積です。この意味が分からない人は、最初にも書きましたが「積分の意味の解説プリント http://www.hmg-gen.com/kaitou2-12.pdf 」を見てください。

微小区間は底面積が $S(h)$ で高さが dh の四角柱になります。よって、微小区間の体積は $S(h)\,dh = 4(1+h)^2\sqrt{1-h^2}\,dh$ となります。h は -1 から 1 まで変化するので、これが積分区間となります。

以上より、求める体積は $\int_{-1}^{1} 4(1+h)^2\sqrt{1-h^2}\,dh$ となり、後はこれを計算するだけです。計算はかなり面倒ですが丁寧に解いていくしかありません。

【（2）の解答】

求める体積を V とする。(1) を考え、体積は以下のようになる。

$$V = \int_{-1}^{1} S(h)\,dh$$
$$= \int_{-1}^{1} 4(1+h)^2 \sqrt{1-h^2}\,dh$$

ここで、$h = \sin\theta$ とする。

$$h = \sin\theta$$
$$\frac{dh}{d\theta} = \cos\theta$$ ◀ 両辺を h で微分した
$$dh = \cos\theta\,d\theta$$

h	$-1 \to 1$
θ	$-\frac{\pi}{2} \to \frac{\pi}{2}$

$$V = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 4(1+\sin\theta)^2 \sqrt{cos^2\theta}\,\cos\theta\,d\theta$$
$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 4(1+\sin\theta)^2 \cos^2\theta$$

⇑ $\sqrt{\cos^2\theta} = |\cos\theta|$ だが、$-\frac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}$ より $\cos\theta \leqq 0$ より、$|\cos\theta| = \cos\theta$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 4(\sin^2\theta + 2\sin\theta + 1)\,\cos^2\theta\,d\theta$$

＊ここから、偶関数奇関数の知識を使います。偶関数どうし、奇関数同士をかけ合わせた関数は偶関数になります。また偶関数と奇関数をかけ合わせた関数は奇関数になります。

なお、偶関数、奇関数については http://www.hmg-gen.com/kaitou3-8.pdf に詳しく解説しています。もし分からなければ、こちらのプリントを見てください。

今回は $\sin^2\theta$, $\cos^2\theta$, 1 は偶関数で $2\sin\theta$ のみが奇関数です。

$$V = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 4(\sin^2\theta + 2\sin\theta + 1)\,\cos^2\theta\,d\theta$$
$$= 8\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2\theta\cos^2\theta + \cos^2\theta)\,d\theta$$ ◀ 偶関数、奇関数を使って式変形をした

ここで、

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\theta\cos^2\theta\, d\theta$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 2\theta}{4}\, d\theta$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos 4\theta}{8}\, d\theta$$
$$= \left[\frac{\theta}{8} - \frac{\sin 4\theta}{32}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$
$$= \frac{\pi}{16} - \frac{\sin 2\pi}{32}$$
$$= \frac{\pi}{16}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta\, d\theta$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2\theta}{2}\, d\theta$$
$$= \left[\frac{\theta}{2} + \frac{\sin 2\theta}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$
$$= \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}$$
$$= \frac{\pi}{4}$$

よって

$$V = 8\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2\theta\cos^2\theta + \cos^2\theta)\, d\theta$$
$$= 8\left(\frac{\pi}{16} + \frac{\pi}{4}\right)$$
$$= \boldsymbol{\frac{5}{2}\pi}$$ ◀ これが答え

今回の問題はどうだったでしょうか？非回転体の体積自体はそれほど出題されません。また、(2)の定積分の計算もややこしいのでやや難しい問題だったと思います。このレベルの問題を確実に解けるようになっておいてください。

河見賢司

高校数学の勉強法
http://www.hmg-gen.com/

感想はこちらまでメールをください（何か言ってもらえると嬉しいです）
magdai@hmg-gen.com