問題

x の関数 $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ は極大値と極小値をもち、その差は $\dfrac{4}{27}$ である。

(1) a と b の間に成り立つ関係式を求めよ

(2) 極大値、極小値をとる x の値を、それぞれ a を用いて表せ

【(１) の解説】

３次関数の極大値と極小値の差に関する問題です。数学 II の微積分の頻出問題ですので、しっかりと理解しておいてください。

$y = f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ が $x = \alpha$ で極小値、$x = \beta$ で極大値をとるとします。

$f(\beta) - f(\alpha) = \displaystyle\int_\alpha^\beta f'(x)\,dx$ と表記されるのは分かるかな？

まず、$f(x)$ を微分したものが $f'(x)$ です。微分と積分は逆の関係にあるので、$f'(x)$ を積分すると $f(x)$ になります。

これより、$\displaystyle\int_\alpha^\beta f'(x)\,dx = \Big[f(x)\Big]_\alpha^\beta = f(\beta) - f(\alpha)$ が言えます。

これで、$f(\beta) - f(\alpha) = \displaystyle\int_\alpha^\beta f'(x)\,dx$ と表記される意味は分かったよね。

じゃあ、次に $f'(x)$ を考えていきます。$f'(x) = 3(x-\alpha)(x-\beta)$ ってなるんだけど、分かるかな？

α, β は $f'(x) = 0$ の２解です。$x = \alpha, \beta$ を２解とするような２次方程式は $◯(x-\alpha)(x-\beta) = 0$ となります。◯ の部分には何がきてもＯＫです。

これで分かるという人もいると思うけど、分からないという人もいると思います。そこで、もう少し補足したいと思います。

例えば $(x-1)(x-2) = 0$ っていう方程式があったとします。この方程式の２解は $x = 1, 2$

だよね。

じゃあ、これを逆からいうと $x = 1, 2$ を２解とする２次方程式は $(x-1)(x-2) = 0$ なんじゃないかな。先頭には何がついても２解は $x = 1, 2$ のままなので $x = 1, 2$ を２解とする２次方程式は $◯(x-1)(x-2) = 0$ です。

これと同じように考えて $x = \alpha, \beta$ を２解とするような２次方程式は $◯(x-\alpha)(x-\beta) = 0$ になります。

◯には x^2 の係数がきますが、今回は $f(x) = x^3+ax^2+bx+c$ を微分すると $f'(x) = 3x^2+2ax+b$ となるので x^2 の係数は３となります。これより $f'(x) = 0$ は x^2 の係数が３で $x = \alpha, \beta$ を２解にもつ２次方程式なので $f'(x) = 3(x-\alpha)(x-\beta)$ となります。

以上より

$$\begin{aligned} f(\beta) - f(\alpha) &= \int_{\alpha}^{\beta} f'(x)\,dx \\ &= 3\int_{\alpha}^{\beta} (x-\alpha)(x-\beta)\,dx \end{aligned}$$

となります。

$\displaystyle\int_{\alpha}^{\beta} (x-\alpha)(x-\beta)\,dx$ の計算はできるよね。もし分からない人は以下の事柄を覚えておいてください。有名公式で、放物線と直線によって囲まれる部分の面積を求めるときによく使います。

積分の有名公式

$$\int_{\alpha}^{\beta} (x-\alpha)(\beta-x)\,dx = \frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$$

$$
\begin{aligned}
f(\beta) - f(\alpha) &= \int_{\alpha}^{\beta} f'(x)\,dx \\
&= 3\int_{\alpha}^{\beta} (x-\alpha)(x-\beta)\,dx \\
&= -3\int_{\alpha}^{\beta} (x-\alpha)(\beta-x)\,dx \\
&= -3\cdot\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3 \\
&= -\frac{1}{2}(\beta-\alpha)^3
\end{aligned}
$$

でとりあえずここまできたけど、「ここからどうするの？」と聞くとたまに「α, β の値を求めて ･･･ 」なんていう人がいます。もちろん α, β は $3x^2 + 2ax + b = 0$ の 2 解なんだから求められないこともないんだけど、面倒だよね。そこで、何を使うかというと解と係数の関係を使います。解と係数をとりあえずまとめておきます。

解と係数の関係

2 次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ が 2 解 $x = \alpha, \beta$ をもつとき

$\alpha + \beta = -\dfrac{b}{a},\ \alpha\beta = \dfrac{c}{a}$ がいえる

この解と係数の関係を使うと $3x^2 + 2ax + b = 0$ の 2 解が $x = \alpha, \beta$ なんだから
$\alpha + \beta = -\dfrac{2a}{3},\ \alpha\beta = \dfrac{b}{3}$ が言えます。

ここから $-\dfrac{1}{2}(\beta-\alpha)^3$ を計算していかないといけないんだけど、この式の $(\beta-\alpha)^3$ が仮に $(\beta-\alpha)^2$ だったら簡単に計算をすることができるんじゃないかな？これは対称式の知識を使わないといけないんだけど、以下のように計算できます。

$$
\begin{aligned}
&(\beta-\alpha)^2 \\
=&\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2 \\
=&(\alpha+\beta)^2 - 4\alpha\beta
\end{aligned}
$$

上記の式変形が思いつかない、分からないという人は対称式の知識が不足しています。対称式については、http://www.hmg-gen.com/taisyousiki.pdf で詳しく解説しています。興味のある人は見てください。

さっき、「$(\beta-\alpha)^3$ が仮に $(\beta-\alpha)^2$ だったら」なんて言ったけどこれをするには、次のように式変形をします。

$$(\beta-\alpha)^3=\left\{(\beta-\alpha)^2\right\}^{\frac{3}{2}}$$

上記が成立しているということは指数法則で簡単に説明がつくと思いますが、こんなの知らなかったら思いつかないよね。覚えておいてください。これで、全て準備ができたので解答に進みたいと思います。

【(1) の解答】
$y=f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ とする。$f'(x)=0$ の 2 解を $\alpha, \beta\,(\alpha<\beta)$ とする。

$f'(x)=3x^2+2ax+b$ となる。解と係数の関係より $\alpha+\beta=-\dfrac{2a}{3},\ \dfrac{b}{3}$ となる。

$$
\begin{aligned}
&f(\beta)-f(\alpha)\\
&=\int_\alpha^\beta 3(x-\alpha)(x-\beta)\,dx\\
&=-\frac{3}{6}(\beta-\alpha)^3\\
&=-\frac{1}{2}\left\{(\beta-\alpha)^2\right\}^{\frac{3}{2}}\\
&=-\frac{1}{2}\left\{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta\right\}^{\frac{3}{2}}\\
&=-\frac{1}{2}\left\{\left(-\frac{2}{3}a\right)^2-4\cdot\frac{b}{3}\right\}^{\frac{3}{2}}\\
&=-\frac{1}{2}\left(\frac{4}{9}a^2-\frac{4}{3}b\right)^{\frac{3}{2}}
\end{aligned}
$$

極大値と極小値との差が $\dfrac{4}{27}$ なので、$f(\beta)-f(\alpha)=-\dfrac{4}{27}$ となる。

$$-\frac{1}{2}\left(\frac{4}{9}a^2-\frac{4}{3}b\right)^{\frac{3}{2}}=-\frac{4}{27}$$
$$\frac{4}{9}a^2-\frac{4}{3}b=\frac{4}{8}$$
$a^2-3b=1$ ◀ これが答え

【(2) の解説】

(2)は(1)で求まった関係式を入れるだけなので簡単です。それでは、解答に進みます。

【(2)の解答】

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$$

$$= 3x^2 + 2ax + \frac{a^2-1}{3} \ (\because \ (1) \text{より} \ b = \frac{a^2-1}{3})$$

$$= \frac{1}{3}\left\{9x^2 + 6ax + (a^2-1)\right\}$$

$$= \frac{1}{3}\left\{9x^2 + 6ax + (a+1)(a-1)\right\}$$

$$= \frac{1}{3}(3x+a+1)(3x+a-1)$$

⇑因数分解が気付けない人がいるが、こういった問題はほとんど因数分解ができます。全然根拠はないけど、もし因数分解ができないんだったら解の公式を使わないといけないよね。解の公式は答えが汚くなってしまいます。汚い答えはあまり出てこないので、こういったときは因数分解できることが多いです

x		$-\frac{a-1}{3}$		$-\frac{a+1}{3}$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗		↘		↗

増減表より $x = -\frac{a-1}{3}$ のとき極大値、$x = -\frac{a+1}{3}$ のときに極小値となる。

今回の問題はどうだったでしょうか。極大値と極小値の差に関する問題ですが、知らない人が多いです。入試では頻出とまではいきませんが、比較的よく出てきます。やや独特な式変形をします。しっかりと理解しておいてください。

河見賢司

高校数学の勉強法
http://www.hmg-gen.com/

感想はこちらまでメールをください（何か言ってもらえると嬉しいです）
magdai@hmg-gen.com