問題

$abc \neq 0,\ a+b+c=0$ のとき、$a\left(\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right)+b\left(\dfrac{1}{c}+\dfrac{1}{a}\right)+c\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right)$ の値を２通りの解法で解け

【ひとつめの解法の解説】
この問題を見てすぐに思い出して欲しいことは、以下の通りです。

数学の決まりごと

数学では、文字の数が多ければ多いほどとにかく大変！そこで、文字の数を減らせるときは何よりもまず文字の数を減らしてから考える

この決まりごとから考えると、求める式の $a\left(\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right)+b\left(\dfrac{1}{c}+\dfrac{1}{a}\right)+c\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right)$ は文字は a, b, c の３つだよね。

でも、$a+b+c=0$ っていう条件を $c=-a-b$ と変形をして $a\left(\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right)+b\left(\dfrac{1}{c}+\dfrac{1}{a}\right)+c\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right)$ に代入をしたら、とりあえず文字は a, b, c の３つから c が消去されて a, b の２つになります。文字の数が３つから２つに減ったので考えやすくなります。

よくこういうふうにするというと「そう式変形をしたらうまくいく根拠ってあるんですか？」なんて言われることがあります。でも、根拠なんてありません。なぜだか知りませんが「**数学は文字の数を減らせばうまくいくようになっています**」。とりあえず「そういうものだ」と納得しておいてくださいね。

それでは、これを使って問題を解いていこうと思います。**文字消去するだけで、解けてしまう**ということが実感できると思いますよ。

【ひとつめの解法の解答】

$$
\begin{aligned}
&a\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+b\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right)+c\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\\
=&a\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{-a-b}\right)+b\left(\frac{1}{-a-b}+\frac{1}{a}\right)+(-a-b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right) \blacktriangleleft c=-a-b \text{ を代入した}\\
=&a\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{a+b}\right)+b\left(-\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a}\right)-(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\\
=&\cancel{\frac{a}{b}}-\frac{a}{a+b}-\frac{b}{a+b}+\cancel{\frac{b}{a}}-1-\cancel{\frac{a}{b}}-\cancel{\frac{b}{a}}-1\\
=&-\frac{\cancel{a+b}}{\cancel{a+b}}-2\\
=&-3 \blacktriangleleft \text{これが答え}
\end{aligned}
$$

少し計算が面倒だったかもしれませんが、これで解けるということが分かったと思います。繰り返しになりますが、次のことを覚えておいてください。

「数学で文字の数を減らせるときは、何よりもまず文字の数を減らしてから考える」

【ふたつめの解法の解説】

ひとつめの解法で「**数学で文字の数を減らせるときは何よりもまず文字消去**」ということを覚えてもらいました。

先ほど解説したような解法で解いてもらってもいいのですが、今回の条件式は $a+b+c=0$ です。このように $a+b+c=(\text{一定})$ のときは、以下のように解く方法もあります。意外に良く出てくる手法なのでしっかりと理解しておいてください。

$a+b+c=(\text{一定})$ の扱い方

> $a+b+c=(\text{一定})$ という条件が出てきたときは、$a+b=(\text{一定})-c$, $b+c=(\text{一定})-a$, $c+a=(\text{一定})-b$ とするとうまくいくことが多い！

今回も $a+b+c=0$ という条件が与えられているので、上記を使おうかな？と思います。ただ、この条件を使うためには $a+b$, $b+c$, $c+a$ が必要です。ですから、とりあえず $a+b$, $b+c$, $c+a$ を出すことを最初の目的にします。

そこで、$a\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+b\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right)+c\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$をどうゆうふうに式変形をしたら$a+b,\ b+c,\ c+a$が出るだろう？と考えて、以下のようにすれば出てくることがわかります。

$$
\begin{aligned}
&a\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+b\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right)+c\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\\
&=a\cdot\frac{b+c}{bc}+b\cdot\frac{c+a}{ac}+c\cdot\frac{a+b}{ab}
\end{aligned}
$$

とりあえず上記のように式変形をしたら$a+b,\ b+c,\ c+a$が出てきてくれます。そこで$a+b+c=0$より$a+b=-c,\ b+c=-a,\ c+a=-a$を代入してみます。

$$
\begin{aligned}
&a\cdot\frac{b+c}{bc}+b\cdot\frac{c+a}{ac}+c\cdot\frac{a+b}{ab}\\
=&a\cdot\frac{-a}{bc}+b\cdot\frac{-b}{ac}+c\cdot\frac{-c}{ab}
\end{aligned}
$$

上記のように式変形できるけど、これではなんとなくうまくいきそうにないよね？当たり前なんだけど、文字の数を減らしたら簡単で見やすい式になることがほとんどです。でも、これでは次数も高くなってしまうし、かえって見にくくなってしまいます。これでは、失敗です。

そこで、上記のように式変形をする以外になんとか$a+b,\ b+c,\ c+a$を出すことはできないかな？と考えます。$a\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+b\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right)+c\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$を式変形するにはとりあえずカッコを外して展開をするぐらいしかないので、カッコを外して展開をしてみることにします。

$$
\begin{aligned}
&a\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+b\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right)+c\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\\
=&\frac{a}{b}+\frac{a}{c}+\frac{b}{c}+\frac{b}{a}+\frac{c}{a}+\frac{c}{b} \quad \blacktriangleleft \text{ただ単に展開をした}\\
=&\left(\frac{a}{c}+\frac{b}{c}\right)+\left(\frac{b}{a}+\frac{c}{a}\right)+\left(\frac{c}{b}+\frac{a}{b}\right) \quad \blacktriangleleft \text{分数が同じもの同士をペアにした}\\
=&\frac{a+b}{c}+\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b} \quad \blacktriangleleft\ a+b,\ b+c,\ c+a\ \text{の形が出てきた！}
\end{aligned}
$$

こういうふうにしたら$a+b,\ b+c,\ c+a$の形が出てきたけど、これだったらなんだかうまくいきそうだよね。

それでは、解答に進みます。

【ふたつ目の解法の解答】

$$a\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+b\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right)+c\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$$

$=\frac{a}{b}+\frac{a}{c}+\frac{b}{c}+\frac{b}{a}+\frac{c}{a}+\frac{c}{b}$ ◀ ただ単に展開をした

$=\left(\frac{a}{c}+\frac{b}{c}\right)+\left(\frac{b}{a}+\frac{c}{a}\right)+\left(\frac{c}{b}+\frac{a}{b}\right)$ ◀ 分数が同じもの同士をペアにした

$=\frac{a+b}{c}+\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}$ ◀ $a+b,\ b+c,\ c+a$ の形が出てきた！

ここで $a+b+c=0$ より、$a+b=-c,\ b+c=-a,\ c+a=-b$ をそれぞれ代入して

$=\frac{-\cancel{c}}{\cancel{c}}+\frac{-\cancel{a}}{\cancel{a}}+\frac{-\cancel{b}}{\cancel{b}}$

$=-1-1-1$

$=-3$ ◀ これが答え！

今回の問題はどうだったでしょうか？こういった問題って解き方っていうか考え方さえ覚えておけば解けてしまうよね。数学ってこういう問題が多く、考え方を覚えていれば解けてしまうという問題も多いです。

まずは、こういった数学の考え方をひとつずつ身につけることを優先してください。それでは、がんばってください。

河見賢司

高校数学の勉強法
http://www.hmg-gen.com/

感想はこちらまでメールをください（何か言ってもらえると嬉しいです）
magdai@hmg-gen.com

「**高校数学の達人・河見賢司のメルマガ**」は以下から登録できます。
http://www.hmg-gen.com/merumagatouroku.html