

問題

$x^2 + y^2 = 1$ のとき、 $x + y$ の最大値と最小値を求めよ。

【解説】

今回は $x + y$ の最大値、最小値を求めよといった問題です。 $x + y$ のように文字が2つある式のことを2変数関数と言います。

2変数関数の最大値、最小値問題は1変数関数にしてから解いていくことが基本です。

で、何とか1変数にできないかな?とを考えてみても $x^2 + y^2 = 1$ を式変形して、 $y = \pm \sqrt{1 - x^2}$ として $x + y = x \pm \sqrt{1 - x^2}$ としたら1変数にできるかもしれないけど、どう考えてもこれって式が汚すぎるよね。

そこで、こういった(2変数関数だけど、1変数関数にすると汚すぎる)問題は1変数にする以外の解法が存在します。まずは、このことを覚えておいてください。

そこで、どうしようかな?と考えるんだけど、1変数にできない以上直接求めることはできないので、「 $x + y$ はどういう値をとりうるか」といった感じで考えてみることにします。

$x + y$ がどういう値をとりうるか考えてみます。例えば、 $x + y$ が2という値をとりうるか?ということを考えてみることにします。 $x + y$ が2という値をとりうる時は当然 $x^2 + y^2 = 1$ かつ $x + y = 2$ を満たすような実数 x, y が存在すればいいことになります。

とういことは $x^2 + y^2 = 1$ と $x + y = 2$ が実数解 x, y をもてばOKです。この2つが解をもつかどうかということは、 x, y のどちらかを消して、あとは判別式で解いていけばOKです。

で、実際に $x^2 + y^2 = 1$ と $x + y = 2$ が実数解をもつか考えてみます。

$x + y = 2$ より、 $y = 2 - x$ これを $x^2 + y^2 = 1$ に代入すると

$$x^2 + (2 - x)^2 = 1$$

$$x^2 + x^2 - 4x + 4 = 1$$

$$2x^2 - 4x + 3 = 0$$

判別式を D とする。

$$\frac{D}{4} = 2^2 - 6 = -2 < 0$$

よって、実数解はない。

上記のようになるので、 $x + y$ は 2 という値をとりえません。

さっきは $x + y = 2$ というふうにして解いていったけど、今度はこれを一般形にして $x + y = k$ として解いていきます。それでは、解答に進みます。

【解答】

$x + y$ が k という値をとりうる

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1$ かつ $x + y = k$ を満たす実数 x, y が存在

$x + y = k$ より、 $y = k - x$ を $x^2 + y^2 = 1$ に代入して $x^2 + (k - x)^2 = 1$ が実数 x をもつような k の値の範囲を求める。

(注) たまに「実数 x と y が存在しないといけないのに、実数 x が存在するだけで大丈夫ですか？ y は必要ないのですか？」と質問をされることがあります。

これは別に OK です。なぜなら $x + y = k$ という関係式があります。 k は実数です。実数 x が存在すれば $y = k - x$ より y は (実数) - (実数) となります。このとき、当然 y も実数となってくれます

$$x^2 + (k - x)^2 = 1$$

$$2x^2 - 2kx + k^2 - 1 = 0$$

この判別式を D とする。実数が存在するためには $D \geq 0$ であればよい

$$\frac{D}{4} = k^2 - 2(k^2 - 1) \geq 0$$

$$- \sqrt{2} \leq k \leq \sqrt{2}$$

以上より、最大値 $\sqrt{2}$ 、最小値 $-\sqrt{2}$ となる。 ◀ **これが答え**

(注) さっきは $-\sqrt{2} \leq k \leq \sqrt{2}$ からすぐに、最大値 $\sqrt{2}$ 、最小値 $-\sqrt{2}$ としましたが、不等式を使った最大値、最小値は本来なら等号が成立するような x, y が存在して始めて最大値、最小値ということが言えます。

ですが、今回の場合、等号成立する x, y は明らかに存在するので別にいいかな？と思います。より丁寧に書きたい人は、等号成立も確認しておいてください。

今回の問題ですが、ユーチューブを使った動画でも解説しています。興味のある人は見てください。

<http://youtu.be/PM4cOJz8R-g>

また、今回は数学 I の解き方でやりましたが、これは数学 II の「図形と方程式」を使った解法と「三角関数」を使った解法があります。いずれも動画で解説しています。

「図形と方程式を使った解法」

<http://youtu.be/Dzjb1zl1MjY>

「三角関数を使った解法」

<http://youtu.be/u8XSWY1OKQw>

河見賢司

高校数学の勉強法

<http://www.hmg-gen.com/>

感想はこちらまでメールをください（何か言ってもらえると嬉しいです）

magdai@hmg-gen.com

大好評の無料メルマガ

「高校数学の達人・河見賢司のメルマガ」は以下から登録できます。

<http://www.hmg-gen.com/merumagatouroku.html>