「ルールを覚えれば誰でもできる！あなたの数学の偏差値を７０にするプリント」の詳細は以下をクリック！
https://www.hmg-gen.com/tuusin.html

「自宅に居ながら１対１の数学の授業が受けられます」の詳細は以下をクリック！
https://www.hmg-gen.com/tuusin1.html

質問内容

２次関数の $a \leqq x \leqq a+1$ といった場合分けの必要な最大値、最小値の問題が意味不明です。解き方を教えてください。

回答

そうですね。確かに難しいです。多くの高校生が苦手にしていると思います。

僕も高校生の頃、初めて２次関数を勉強したときはまったく理解できなかったのを覚えています。

場合分けの必要な最大値、最小値問題に進む前にまずは次の問題を解いてみてください。

補題

$y=(x-1)^2$ の以下の範囲における最小値を求めよ

(1) $-2 \leqq x \leqq 0$　　(2) $0 \leqq x \leqq 2$　　(3) $2 \leqq x \leqq 4$

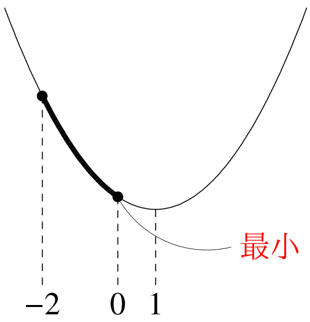
【解答】

「関数の最大値、最小値問題はグラフをかいて考える」ということを覚えておいてください。

今回の問題も関数の最大値、最小値問題ですからグラフをかいて考えていきます。

【解答】

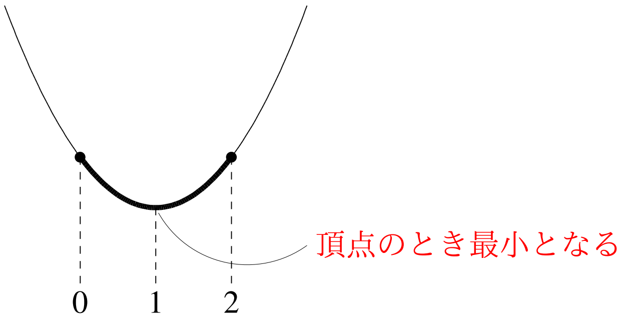
(1)



グラフより、$x = 0$ のとき最小となる。$y = (x - 1)^2$ に $x = 0$ を代入すると 1。

よって $x = 0$ のとき最小値 **1** をとる。

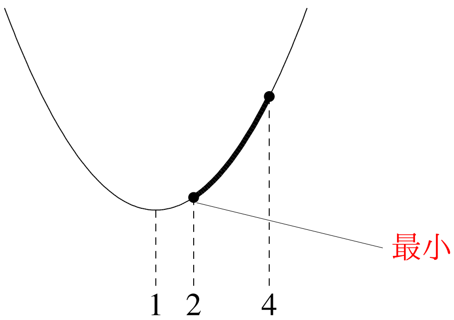
(2)



グラフより、$x = 1$ のとき最小となる。$y = (x - 1)^2$ に $x = 1$ を代入すると 0。

よって $x = 1$ のとき最小値 **0** をとる。

(3)



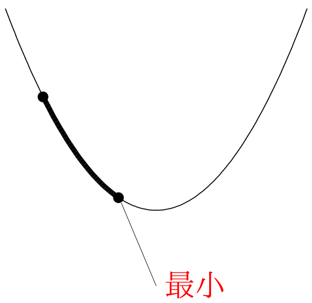
グラフより、$x=2$ のとき最小となる。$y=(x-1)^2$ に $x=2$ を代入すると 1。

よって $x=2$ のとき最小値 **1** をとる。

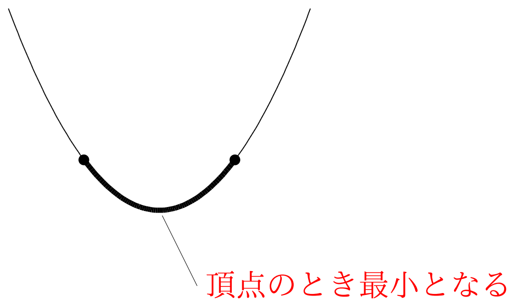
これで、補題は終わりです。この補題だけならほとんどの人が解けたと思うんですけど、ここで覚えてほしいことは次の図です。

2 次関数の最小値の位置

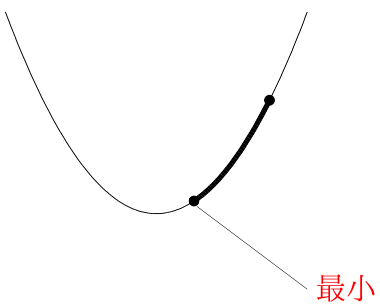
(i) 定義域が軸の左側にあるとき



(ii) 定義域が軸を含んでいるとき



(iii) 定義域が軸の右側にあるとき



上図の赤枠のように、下に凸な放物線の最小値の位置は、(i) 定義域が軸の左側にある、(ii) 定義域が軸を含んでいる、(iii) 定義域が軸の右側にあるかで変わってきます。

$a \leqq x \leqq a+1$ のように a の値によって定義域が変わってくるときも、上記の 3 パターンに場合分けをしたらいいだけなんです。では、このことを踏まえた上で次の問題を解いてください。

問題

$y = x^2 - 2x + 5$ の $a \leqq x \leqq a + 1$ における最小値を求めよ。

【解説】

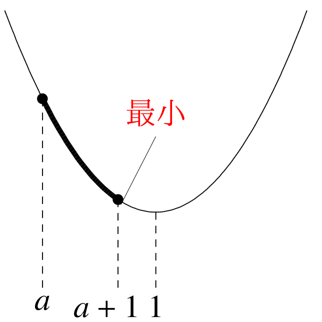
最小値の問題だから、さっきの考え方に基づいて定義域が軸の左側にある、軸を含んでいる、軸の右側にあるかで判断をしていくんだけど、その前に $y = x^2 - 2x + 5$ の平方完成をしないと軸の位置が分からないので、まずは平方完成をします。

$$
\begin{aligned}
y &= x^2 - 2x + 5 \\
&= (x-1)^2 - 1 + 5 \\
&= (x-1)^2 + 4
\end{aligned}
$$

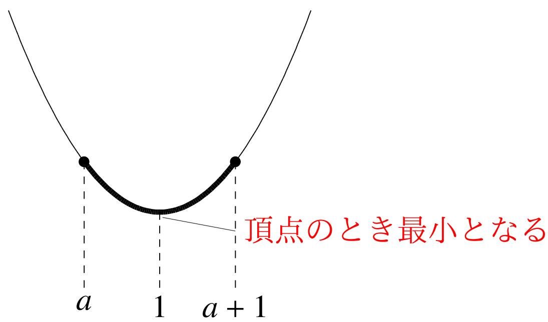
◀ 平方完成をして、軸が直線 $x = 1$ ということが分かった

では、この問題を解いていくけど、この問題は以下の３パターンに場合分けします。

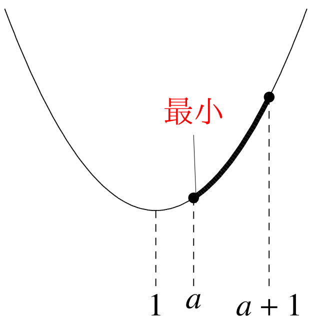
(i) 定義域が軸の左側にあるとき



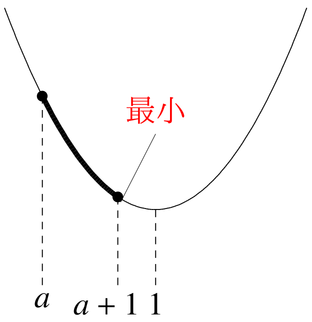
(ii) 定義域が軸を含んでいるとき



(iii) 定義域が軸の右側にあるとき



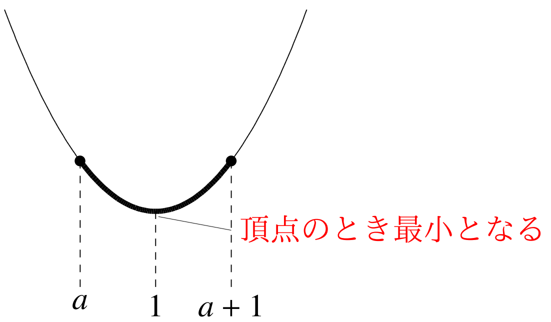
で、これを使って解いていくんですけど、ここで場合分けが必要になってきます。
まず、(i) は a がどういう値の範囲になるか分かる？もう一度図をかくけど



こうなるときは定義域の右側の $a+1$ が 1 の左側にあるときだよね？左側にあるっていうことは $a+1$ が 1 より小さいときなんだから、当然 $a+1<1$ ってなります。

$a+1<1$ を a について解くと $a<0$ になるので、$a<0$ のときは $x=a+1$ で最小値をとります。

次に、(ii) の場合です。(ii) 場合は下図のようになります。



上記のようになるには軸の直線 $x=1$ が a と $a+1$ に挟まれているので $a \leqq 1 \leqq a+1$ のときです。

$a \leqq 1 \leqq a+1$ を a について解いていきますが、この不等式の解き方は知っている人も多いと思いますが念のため書いておきます。

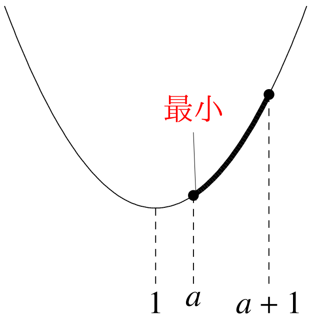
$A<B<C \iff A<B$ かつ $B<C$ である。

これに従って $a \leqq 1 \leqq a+1$ を解くと

$a \leqq 1 \leqq a+1 \iff a \leqq 1$ かつ $1 \leqq a+1$ となります。$1 \leqq a+1$ を解くと $a \geqq 0$ となります。

$a \leqq 1$ と $a \geqq 0$ をあわせて書くと $0 \leqq a \leqq 1$ のときとなります。このとき、上図より $x = 1$ のとき最小となります。

最後に (iii) のときです。



上図のようになるときは、1 より a の方が右側にある、つまり 1 より a の方が大きときだから $1 < a$ となります。このとき $x = a$ で最小値をとります。

以上のことを踏まえ解答に移ります。

【解答】

$y = f(x) = x^2 - 2x + 5$ とする。

$$y = f(x) = x^2 - 2x + 5$$
$$= (x - 1)^2 + 4$$ ◀ 平方完成をした

(i) $a + 1 < 1$ つまり $a < 0$ のとき、$x = a + 1$ で最小となる。

$$f(a + 1) = (a + 1 - a)^2 + 4$$ ◀ $x = a + 1$ を平方完成した式に代入した。
$$= a^2 + 4$$

(ii) $a \leqq 1 \leqq a + 1$ つまり $0 \leqq a \leqq 1$ のとき、$x = 1$ で最小値 4 をとる。

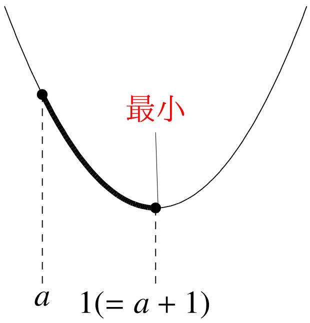
(iii) $1 \leqq a$ のとき、$x = a$ で最小値 $a^2 - 2a + 5$ をとる。

以上より、$\begin{cases} \boldsymbol{a < 0} \text{ のとき、} x = a + 1 \text{ で最小値 } \boldsymbol{a^2 + 4} \text{ をとる。} \\ \boldsymbol{0 \leqq a \leqq 1} \text{ のとき、} x = 1 \text{ で最小値 } \boldsymbol{4} \text{ をとる。} \\ \boldsymbol{1 < a} \text{ のとき、} x = a \text{ で最小値 } \boldsymbol{a^2 - 2a + 5} \text{ をとる。} \end{cases}$

【注】

さきほどの場合分けで、$a<0$ のとき、$0 \leqq a \leqq 1$ のとき、$1<a$ のときと場合分けしました。イコールの入る位置だけどどっちでもいいですよ。

例えば、$a \leqq 0$ のとき、$0<a<1$ のとき、$1 \leqq a$ のときとしてもＯＫです。例えば $a=0$ のときです。このときは以下のようになります。



上図のように $a=0$ のときは、$x=1$ で最小でもありますが、頂点のときに最小でもあります。だから、$a=0$ のときは、場合分けのどっちにいれてもらっても大丈夫です。

もう一方の、$a=1$ のときも好きな方に入れておいてもらえば大丈夫ですよ。

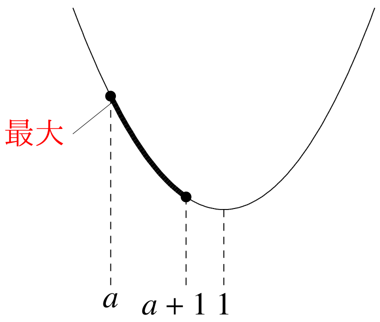
これで、最小値の方が終わりました。次に最大値に進みますね。

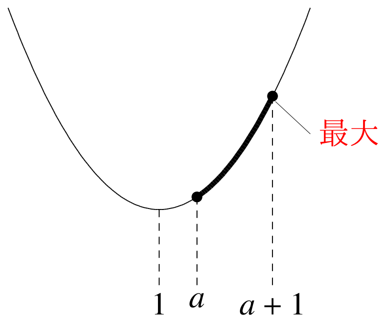
問題

$y=x^2-2x+5$ の $a \leqq x \leqq a+1$ における最大値を求めよ。

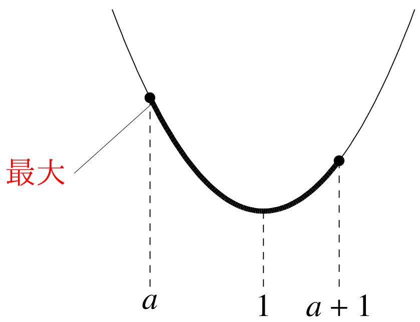
【解説】

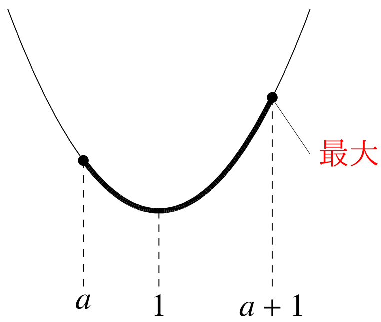
最大値も同じように考えていったらいいんですけど、定義域が軸より左側にあるときと、定義域が軸より右側にあるときは簡単に考えることができます。





と、いうふうに定義域が軸の左側や右側にあるときは簡単に最大値が分かるんですけど、軸が定義域に含まれているときは少し面倒です。

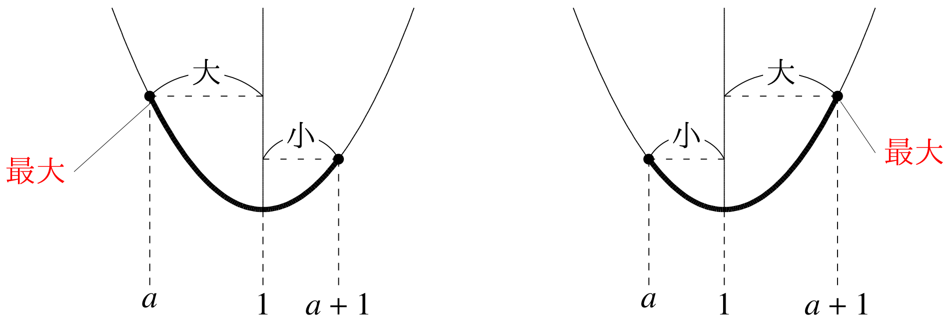




上図のように軸が定義域に含まれているときでも、左図のように $x = a$ で最大となることもあれば、右図のように $x = a + 1$ で最大となることもあるよね？これってどういうふうに判断できるか分かる？

２次関数のグラフは軸に関して対称っていうことは知っているよね？(もし、知らなかったら覚えておいてください。ちなみに軸に関して対称とは軸について折り返したとき図形が一致するということです。)

２次関数のグラフは軸に関して対称対称なんだから、軸から遠い方が最大となるよね？



上図はふたつとも、軸が定義域に含まれているんだから $a \leqq 1 \leqq a+1$ つまり $0 \leqq a \leqq 1$ っていう条件を満たしています。

その上で上図の左側は 1 から a までの距離と 1 から $a+1$ までの距離とを比べると 1 から a までの距離の方が 1 から $a+1$ までの距離より大きくなります。

1 から a までの距離は $1-a$ で、$a+1$ から 1 までの距離は $(a+1)-1$ となるから、
⇑ y 座標が等しいので、x 座標の差が距離となる。数直線上における距離は、大きいものから小さいものをひいたものです。

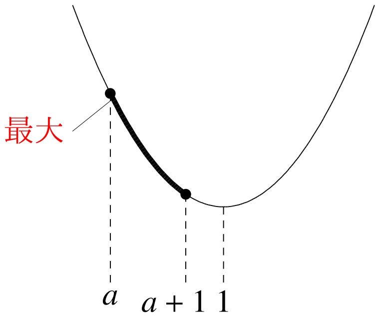
左側の図のときは $1-a > (a+1)-1$ となります。

$1-a > (a+1)-1$ を解くと $a < \dfrac{1}{2}$ となります。これと軸が定義域に含まれるという条件 $0 \leqq a \leqq 1$ とを合わせると $0 \leqq a < \dfrac{1}{2}$ です。

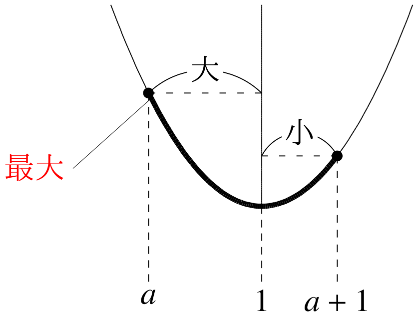
反対に、右側の図は a からの距離より $a+1$ からの距離の方が大きいので、$1-a < (a+1)-1$ となります。

$1-a < (a+1)-1$ を解くと、$a > \dfrac{1}{2}$ となります。これも先ほどの左側の図のときと同じように軸が定義域に含まれるという条件 $0 \leqq a \leqq 1$ をあわせて考えると $\dfrac{1}{2} < a \leqq 1$ となります。

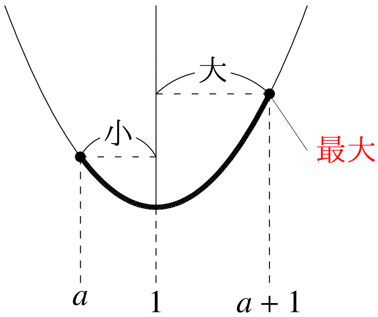
(i) $a+1<1$ つまり $a<0$ のとき



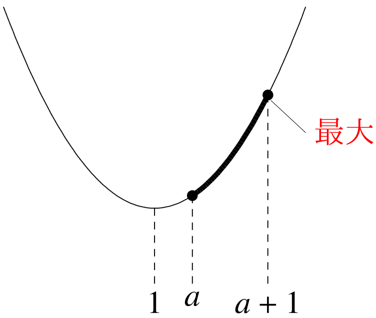
(ii) $0 \leqq a < \frac{1}{2}$ のとき



(iii) $\frac{1}{2} \leqq a \leqq 1$ のとき



(iv) $1<a$ のとき



上記 (i) と (ii) は $x=a$ のときに最大になります。そして (i) の $a<0$ と (ii) の $0 \leqq a < \frac{1}{2}$ はまとめることができ $a<\frac{1}{2}$ となります。

このことから $a<\frac{1}{2}$ のときは、$x=a$ のとき最大となります。

次に (iii) と (iv) のときです。(iii) と (iv) は $x=a+1$ のとき最大になります。これも同じようにまとめることができます。

(iii) の $\frac{1}{2}<a<1$ と (iv) の $1<a$ をまとめると $\frac{1}{2}<a$ となります。

あと、$a=\frac{1}{2}$ のときです。$a=\frac{1}{2}$ のときは、軸がちょうど真ん中にあるので $x=a, x=a+1$、今回の場合 $a=\frac{1}{2}$ なので $x=\frac{1}{2}, \frac{3}{2}$ における y の値は等しくなります。それでは、解答にすすみます。

【解答】

$y = x^2 - 2x + 5$

$\quad = (x-1)^2 + 5$

(i) $\boldsymbol{a < \frac{1}{2}}$ のとき、$x = a$ で最大値 $\boldsymbol{a^2 - 2a + 5}$ をとる。

(ii) $\boldsymbol{a = \frac{1}{2}}$ のとき、$x = a, a+1$ つまり $x = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}$ で最大値 $\boldsymbol{\frac{17}{4}}$

(iii) $\boldsymbol{\frac{1}{2} < a}$ のとき、$x = a+1$ で最大値 $a^2 + 4$ をとる。

これで、今回の２次関数の場合分けの必要な最大値、最小値問題の解説プリントは終わります。高校数学の関数分野において２次関数は一番の基本となるところです。

と言いますか、２次関数には高校数学の関数分野の考え方がほとんどすべて含まれているので (場合分け、文字の置き換え、最大値・最小値の考え方など)、２次関数をしっかりと理解することによって他の関数の単元（三角関数、指数・対数、３次関数）などが本当に理解しやすくなります。

よく、「三角関数が分かりません」なんて言ってくる生徒がいますが、その人たちは実は三角関数が分からないんじゃなくて２次関数が理解できていないということが多いです。

２次関数さえしっかりと理解できていたら、他の関数分野は新しく出てくる定理などを覚えたらすんなりと理解することができます。

２次関数は、そのくらい重要なところなのでしっかりと勉強をしておいてください。

数学って難しいですよね。でも、数学って「このときはこうする」というルールがあってそれをひとつずつ覚えていけば誰でもできるようになります。

「今までの苦労はなんだったの？」と思えるほど、簡単にできるようになりますよ。

「４浪しているのにセンター６割」
→「わずか入会８か月後に島根大学医学部医学科に合格！」

本人いわく「悲惨な成績」で限りなく学年で下位
→「ぐんぐん成績をあげて筑波大学理工学群現役合格！」

「問題が少し難しくなるととたんに解けなくなる」
→「解き方のルールを覚えて難問も解けるようになり東北大学歯学部に合格！」

多くの受験生が数学の成績をあげた秘訣を紹介します。

以下の無料メルマガの登録をしてください。無料ですし、いつでも解除できるので登録しないと損ですよ。以下の枠をクリックしてください。

ルールが分かれば誰でもできる！
あなたの数学の偏差値を７０にするメルマガ

ラインでも配信しています。ラインの方は以下よりお願いします。

ラインで登録する！

ツイッターやっています
https://twitter.com/hmggen

高校数学の勉強法
https://www.hmg-gen.com/

医学部数学の勉強法

https://www.ouen-math.com/

感想はこちらまでメールをください（何か言ってもらえると嬉しいです）
magdai@hmg-gen.com

河見賢司