質問内容

不等式 $\dfrac{8}{x} > x - 2$ はどうやって解くんですか？

分数だから考えにくいので、両辺に x をかけて計算をしていくのかな？と思ったんですけど、どうもまちがいのようです。

回答

こんにちは、河見賢司です。両辺に x をかけたくなる気持ちよく分かります。

典型的な誤答例を書いておきます。

【誤答例】

$\dfrac{8}{x} > x - 2$

$8 > x^2 - 2x$ ◀ 両辺に x をかけた

$x^2 - 2x - 8 < 0$

$(x + 2)(x - 4) < 0$

$\therefore\ -2 < x < 4$

上記の解答はどこで間違っているのか分かる？実は、$\dfrac{8}{x} > x - 2$ の両辺に x をかけて $8 > x^2 - 2x$っている式変形をしたところです。

$2x < 8$ を解くと $x < 4$ となり、$-2x < -8$ を解くと $x > 4$ となることは当然わかるよね？このことから何を思い出してほしいのかというと、**不等式の両辺にプラスをかけたときは不等号の向きはそのままで、マイナスをかけたときは不等号の向きが反対になる**ということです。

誤答の x をかけたところを見てほしいんだけど、x の正負って分かっていないんだよね？だから、x が正のときは誤答のように不等号の向きはそのままでいいんだけど、x の値が負のときは不等号の向きは逆になります。

言われてみたら当たり前なんですけど、忘れやすいですよね？ですから、**不等号の両辺を変数でかけるときは、必ずその変数の正負に注意する (両方ともとりうる場合は場合分けが必要)** ということを頭にいれておいてください。

それでは、このことを踏まえて解答に進みます。

【解答】

(i) $x > 0$ のとき

$\dfrac{8}{x} > x - 2$

$8 > x^2 - 2x$ ◀ 両辺に x をかけた。$x > 0$ より不等号の向きはそのまま

$x^2 - 2x - 8 < 0$

$(x+2)(x-4) < 0$

$\therefore\ -2 < x < 4$

$x > 0$ なので、$0 < x < 4$ となる。 ◀ $x > 0,\ -2 < x < 4$ の両方を満たしている範囲

(ii) $x < 0$ のとき

$\dfrac{8}{x} > x - 2$

$8 < x^2 - 2x$ ◀ 両辺に x をかけた。$x < 0$ より不等号の向きは逆になる

$x^2 - 2x - 8 > 0$

$(x+2)(x-4) > 0$

$\therefore\ x < -2,\ 4 < x$

$x < 0$ なので、$x < -2$ となる。 ◀ $x < 0$ と $x < -2,\ 4 < x$ の両方を満たしている範囲

以上より、$x < -2,\ 0 < x < 4$ ◀ これが答え

(注) 今回の問題で $x > 0,\ x < 0$ と場合分けしました。以前生徒から $x = 0$ のときは考えなくていいのですか？ときかれてことがあります。今回の問題の場合 $x = 0$ は考えません。問題の不等式に $\dfrac{8}{x}$ というものがあります。分母が 0 になるという数字は存在しません。これが存在する時点で x は $x \neq 0$ という隠れて条件があります。ですから $x = 0$ は考えなくていいです。

今回は数学 I の範囲で解きました。数学 II の勉強がすんでいるのなら次のような解法があります。

さっきの問題を思い出してほしいんだけど、分数があれば考えにくいから両辺に x をかけて分数を払う、でも x の正負が分からないから場合分けをしたんだよね？

この解き方でいいんですけど、場合分けって同じようなことを２回しないといけないからあまりしたくないよね？そこで、両辺に x^2 をかけるんです。

なぜ、x^2 をかけるのかというと、両辺に x^2 をかけると分数がなくなり考えやすくなります。また、x^2 は当然 $x^2 > 0$ という条件があって、x の値にかかわらずいつも正なので場合分けをする必要がなくなります。

$x^2 > 0$ といいました。x がすべての範囲なら $x \geqq 0$ とイコールを含みますが、今回は $x \fallingdotseq 0$ なので、x^2 の範囲は $x > 0$ となります。

では、このことを使って問題を解いていきます。

【別解】

$\dfrac{8}{x} > x - 2$

両辺に $x^2(>)0$ をかけると

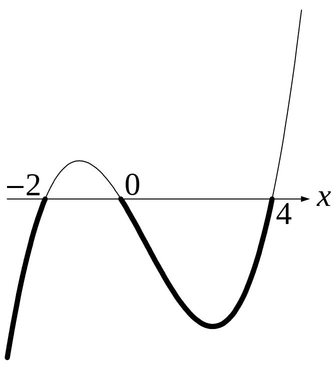
$x^2 \cdot \dfrac{8}{x} > x^2(x-2)$

$8x > x^3 - 2x^2$

$x^3 - 2x^2 - 8x < 0$

$x(x^2 - 2x - 8) < 0$

$x(x-4)(x+2) < 0$



グラフより、$x < -2,\ 0 < x < 4$ ◀ これが答え

(注) $x(x-4)(x+2) < 0$ とは、$y = x(x-4)(x+2)$ と $y = 0$(x 軸のこと) の二つのグラフをかいて $y = x(x-4)(x+2)$ が $y = 0$(x 軸) より下側にあるような x の値の範囲。

$y = x(x-4)(x+2)$ のグラフは微分をしなくても書けます。$y = x(x-4)(x+2)$ は３次関数で、展開したとき x^3 の係数は正になります。

３次関数で、x^3 の係数が正で、極値をもつときは上記のようにＮ型のような形になります。極値をもつってなぜわかったの？という人もいるかもしれませんが、極値をもたないときは単調増加 (単調減少) なので、x 軸との交点はひとつしかありません。

上記のように $x = -2, 0, 4$ で x 軸と交わるということが分かった時点で、「極値は存在するんだな」と思えるようにしておいてください。

今回の解説はこれで終わりです。不等式の両辺に変数をかけるときは場合分けが必要ということを頭に入れておいてください。

河見賢司

目指せ偏差値４５から５５！高校数学の勉強法
http://www.hmg-gen.com/

感想はこちらまでメールをください（何か言ってもらえると嬉しいです）
magdai@hmg-gen.com