

「ルールを覚えれば誰でもできる！あなたの数学の偏差値を70にするプリント」の詳細は以下をクリック！

<https://www.hmg-gen.com/tuusin.html>

「自宅に居ながら1対1の数学の授業が受けられます」の詳細は以下をクリック！

<https://www.hmg-gen.com/tuusin1.html>

#### 質問内容

確率の問題です。

AさんとBさんが、5回試合をする。Aさんが勝つ確率は $\frac{2}{3}$ でBさんが勝つ確率は $\frac{1}{3}$ で引き分けはないものとする。このとき、Aさんの3勝2敗となる確率を求めよ。

こういった問題を学校で解きました。学校で答えが ${}_5C_2 \left(\frac{2}{3}\right)^3 \left(\frac{1}{3}\right)^2$ だって教わりました。 $\left(\frac{2}{3}\right)^3 \left(\frac{1}{3}\right)^2$ はなんとなく分かるんですけど、この ${}_5C_2$ はどこからくるんですか？

#### 回答

そうですね。確かに分かりにくいと思います。でも、これには理由があるので、その理由が分かれば簡単に理解できると思いますよ。今回はそういった話をしていきたいと思います。

でも、その前に確率の問題で「足し算」と「引き算」の区別がついていない人がいるので、まずは「足し算」と「引き算」の区別の仕方を簡単に話していきたいと思います。

「足し算」と「引き算」の区別の仕方なのですが、簡単にいえば、日本語で「そして」のときはかけ算、「または(場合分けできる)」ときは足し算です。この考えは確率だけでなく、場合の数でも同じことが言えます。(\*「そして」がかけざん、「または」は足し算、これって大雑把な考え方ですが、この考え方でやっていけば足し算とかけ算を間違える

ことはないですよ。ただ、数学の言葉ではないので答案に「そしてだからかけ算」なんて書いてはダメですよ)

簡単な具体例をあげると、

「3人を1列に並べるときの場合の数を求めよ」という問題があったとします。この問題の答えは、当然 $3! = 6$ 通りとすぐに分かる人も多いとは思いますが、一応説明をしておきます。

「3人を1列に並べる」の作業を日本語に訳すと、「まず一番左を選ぶ、(そして)左から2番目の人を選ぶ、(そして)一番右の人を選ぶ」です。

3人をAさん、Bさん、Cさんとします。一番左を選ぶときの場合の数は、Aさん、Bさん、Cさんの3通り、左から2番目の人を選ぶ場合の数は、Aさん、Bさん、Cさんの3通りから一番左で選んだ人を除く2通り、一番右を選ぶ場合の数は、Aさん、Bさん、Cさんの3通りから一番左と真ん中で選んだ2人を除く1通りです。

ですから「(3通り)そして(2通り)そして(1通り)」で、(そして)が「掛け算」になることを考えて、この時の場合の数は $3 \times 2 \times 1 = 6$ 通りとなります。

次に、または(場合分け)の話をしてします。「サイコロを1回投げたとき、3の倍数となる確率を求めよ」この問題で解説していきます。サイコロは1から6まであります。この中で3の倍数は3と6です。ですから、3の倍数となるのは次のような日本語にできます。「サイコロが3の倍数となるのは、サイコロが3のとき、(または)サイコロが6のとき」

サイコロが3となる確率は $\frac{1}{6}$ でサイコロが6となる確率は $\frac{1}{6}$ で、今回は「または」で結ばれているので、求める確率は $\frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$ となります。

確率の「掛け算」と「足し算」なんですけど、意外に理解できていなくて混同してしまう人が多くいます。こういうふうに日本語に直して「そして」は掛け算、「または」は足し算というふうに理解するとまず間違えることはないと思いますよ。それでは、本題の問

題に進みたいと思います。少し間があいたので、もう一度問題を書いておきます。

### 問題

AさんとBさんが、5回試合をする。Aさんが勝つ確率は $\frac{2}{3}$ でBさんが勝つ確率は $\frac{1}{3}$ で引き分けはないものとする。このとき、Aさんの3勝2敗となる確率を求めよ。

### 【解説】

Aさんが勝ったときを○、負けた時を×で表したとします。左から順に1試合目、2試合目、…、5試合目とすると、Aさんが3勝2敗となるのは次のような場合が考えられます。

○○○××

↑ 1、2、3試合目までAさんが勝って、4、5試合はAさんが負ける

上記のようになる確率を求めます。まず、これを日本語に直すと、「1試合目はAさんが勝つ、(そして)2試合目はAさんが勝つ、(そして)3試合目はAさんが勝つ、(そして)4試合目はBさんが勝つ、(そして)5試合目はBさんが勝つ」となります。

(そして)は掛け算なので、このときの確率は $\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \left(\frac{2}{3}\right)^3 \left(\frac{1}{3}\right)^2$ となります。

次に、○○××○というような場合も考えられます。このときの確率は $\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \left(\frac{2}{3}\right)^3 \left(\frac{1}{3}\right)^2$ となります。

次に、○×○×○という場合も考えられます。このときの確率は $\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \left(\frac{2}{3}\right)^3 \left(\frac{1}{3}\right)^2$ となります。

ここまで来たらだいたい分かってきたと思いますけど、Aさんの3勝2敗となるパターンはいくつかあるけど、どのような場合でもAさんの3勝2敗となる確率は $\left(\frac{2}{3}\right)^3 \left(\frac{1}{3}\right)^2$ であることが分かります。

で、ここからAさんが3勝2敗となる確率を求めていくのですが、Aさんが3勝2敗と

なる場合の数分  $\left(\frac{2}{3}\right)^3 \left(\frac{1}{3}\right)^2$  を足し合わせたら答えがでるんじゃない？

で、Aさんが3勝2敗となる場合の数は何個あるか(つまり○を3個、×を2個、一列に並べるときの場合の数)という  $\frac{5!}{3! \cdot 2!}$  です。これは分かるよね？もしも忘れていた人は次を覚えておいてください。

同じものを含む順列

$a$  が  $m$  個、 $b$  が  $n$  個ある。

このとき、これらを1列に並べる場合の数は、 $\frac{(m+n)!}{m!n!}$  である。

問題の解説に戻りますが、 $\left(\frac{2}{3}\right)^3 \left(\frac{1}{3}\right)^2$  が  $\frac{5!}{3!2!}$  回おきるんだから、

求める確率は  $\frac{5!}{3!2!} \left(\frac{2}{3}\right)^3 \left(\frac{1}{3}\right)^2$  となります。

今回は○を3個、×を2個、一列に並べるときの場合の数を  $\frac{5!}{3! \cdot 2!}$  で計算しました。計算をしてみれば、すぐに  ${}_5C_2 = \frac{5!}{3! \cdot 2!}$  と確認することができると思います。

多くの問題集では  ${}_5C_2$  を使って問題を解いていると思います。もちろんこれでもいいのですが、ここでは「○を3個、×を2個、一列に並べるときの場合の数」ということをしっかりと認識してもらうために、 $\frac{5!}{3! \cdot 2!}$  を使いました。

どっちで解いてもらってもいいと思いますが、 $\frac{5!}{3! \cdot 2!}$  の方が理由が分かっていいと思います。理由も分からずに解いている人もいますが、そういった人は次の問題で解いてもらいますが、勝ち、負け、引き分けの3通りがあるととたんにできなくなってしまいます。3種類以上の文字を1列に並べる時はこの組み合わせの手法は使えません。

数学全般に言えることですが、単に解くのではなく「なぜ、そう考えたのか」ということを意識しながら解くようしてください

【解答】

求める確率は、 $\frac{5!}{3! \cdot 2!} \left(\frac{2}{3}\right)^3 \left(\frac{1}{3}\right)^2$  となる。

これを計算すると、確率は  $\frac{80}{243}$  となる。

では、これを同じように考える問題をもう一問考えてもらいます。

#### 問題

AさんとBさんがサイコロをそれぞれ1個ずつ投げて、数の大きい目が出た方が勝ちというゲームを4回する。このとき、Aさんお2勝1敗1引き分けとなる確率を求めよ。

ただし、AさんとBさんのサイコロの目が同じときは引き分けとして、それもゲーム数にカウントする。

#### 【解説】

まずはAさんが勝つ確率、引き分ける確率、負ける確率を求めないといけないよね。

Aさんが勝つときの目の出方を考えていきます。

- (i) Aさんが1の目を出したときこのとき、Aさんの目がBさんの目より大きくなることはないので、0通り
  - (ii) Aさんが2の目を出したときBさんの目が1のときの、1通り
  - (iii) Aさんが3の目を出したときBさんの目が1,2の、2通り
  - (iv) Aさんが4の目を出したときBさんの目が1,2,3の、3通り
  - (v) Aさんが5の目を出したときBさんの目が1,2,3,4の、4通り
  - (vi) Aさんが6の目を出したときBさんの目が1,2,3,4,5の、5通り
- 最初に話しましたが、「または(場合分け)」は足し算なので  
Aさんの勝つ確率は $0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$ となります。

よって、Aさんの勝つ確率は $\frac{15}{36} = \frac{5}{12}$ となります。

(注) 今回は場合分けして考えていきましたけど、Aさんの勝つ場合の数はもっと簡単に求めることができます。まずAさんとBさんが引き分けとなる場合の数は6通り(←分かるよね? AさんとBさんが引き分けるのは目の数が同じ時。1で同じ、2で同じ…と6個あるから引き分ける場合の数は当然6通り)

サイコロの目の出方は全部で36通りあります。この中で引き分ける場合の数が6通りなので、Aさんが勝つ、またはBさんが勝つ場合の数は $36 - 6 = 30$ 通りあります。

AさんとBさんが勝つ確率はあきらかに等確率なので、場合の数も等しくなり30の半分の15がAさんの勝つ場合の数です。

人によってはこういう計算は気づきにくいと思う人もいますが、確率はこういった対称性に気づければ計算がラクになるという場合が多いです。こういった計算の仕方もあるんだなと頭に入れておくようにしてください。そうすれば、次第に思いつけるようになっていきますよ

以上より、Aさんの勝つ確率は $\frac{5}{12}$ 、引き分ける確率は $\frac{1}{6}$ 、負ける確率は $\frac{5}{12}$ となります。求める確率はAさんの2勝1敗1引き分けです。

Aさんが勝つとき○、引き分けるときを△、負けるときを×とすると、○を2つ、△を1つ、×を1つ並べる場合の数は $\frac{4!}{2!1!1!}$ となります。

このことを踏まえて解答に進みます。

### 【解答】

AさんとBさんが引き分ける確率は $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

AさんとBさんが勝つ確率は、明らかに等確率なので各々が勝つ確率は $\frac{5}{12}$ となる。

以上より、Aさんが2勝1敗1引き分けとなる確率は、 $\frac{4!}{2!} \cdot \left(\frac{5}{12}\right)^2 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{12}$ となる。

よって、求める確率は $\frac{125}{864}$ となる。

今回の解説プリントはこれで終わりです。基本的なことですが、理解できてなかったという人も多いと思います(僕も、高校生の頃は意味も分からず ${}_5C_2$ をつけていました(苦笑))

意味が分かるとすっきりしますよね。それでは、引き続きがんばってください。

---

数学って難しいですよね。でも、数学って「このときはこうする」というルールがあつてそれをひとつずつ覚えていけば誰でもできるようになります。

「今までの苦勞はなんだったの？」と思えるほど、簡単にできるようになりますよ。

「4浪しているのにセンター6割」

→「わずか入会8か月後に島根大学医学部医学科に合格!」

本人いわく「悲惨な成績」で限りなく学年で下位

→「ぐんぐん成績をあげて筑波大学理工学群現役合格!」

「問題が少し難しくなるととたんに解けなくなる」

→「解き方のルールを覚えて難問も解けるようになり東北大学歯学部合格!」

多くの受験生が数学の成績をあげた秘訣を紹介します。

以下の無料メルマガの登録をしてください。無料ですし、いつでも解除できるので登録しないと損ですよ。以下の枠をクリックしてください。

**ルールが分かれば誰でもできる！  
あなたの数学の偏差値を70にするメルマガ**

ラインでも配信しています。ラインの方は以下よりお願いします。

**ラインで登録する！**

ツイッターやっています

<https://twitter.com/hmggen>

高校数学の勉強法

<https://www.hmg-gen.com/>

医学部数学の勉強法

<https://www.ouen-math.com/>

感想はこちらまでメールをください（何か言ってもらえると嬉しいです）

[magdai@hmg-gen.com](mailto:magdai@hmg-gen.com)

河見賢司