

質問内容

$(a+b+c)^6$ の a^3b^2c の係数を求めよ、という問題を予備校で勉強しました。解き方がよく分からなかったので、質問に行きましたが、「公式にあてはめるだけだよ」と言われました。あてはめたら解くことはできましたが、なんとなく納得できません。何かいい方法はないですか？

回答

そうですね。これは、2項定理でも解くことができますよ。ただ、一応公式を使った解法でも解いてみます。

多項定理

$(a+b+c+\dots)^n$ を展開したとき、 $a^p b^q c^r \dots (p+q+r+\dots=n)$ の係数は $\frac{n!}{p!q!r!\dots}$ となる。

上記のようにしましたが、受験で出題されるのは3項ということがほとんどです。上の公式にあてはめれば分かると思いますが、3項のときは、 $(a+b+c)^n$ を展開したとき、 $a^p b^q c^r (p+q+r=n)$ の係数は、 $\frac{n!}{p!q!r!}$ となります。

それでは、この公式を使って、 $(a+b+c)^6$ の a^3b^2c の係数を求めたいと思います。

【解答】

$(a+b+c)^6$ の a^3b^2c の係数は、

$$\begin{aligned} & \frac{6!}{3!2!1!} \\ &= \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{2} \\ &= 60 \quad \leftarrow \text{これが答え} \end{aligned}$$

上記のように公式を代入したら簡単に解けるけど、なんとなく納得しないよね？実は、これは2項定理で解くことができます。

$a+b+c$ は3項だから2項定理が使えないんだよね？でも、 $a+b+c = (a+b)+c$ とすると2項定理を使える形になるんじゃない？

分からない人は $a+b = A$ とでも、置き換えるといいと思います。そうすると $a+b+c = A+c$ となるので、これで2項定理が使える形になったよね？では、これを使って解いていきます。

$(A+c)^6$ で式変形をした時の a^3b^2c の係数を求めなさいという問題なんですけど、 $A = a+b$ と A には c が含まれていないので c の指数には影響しません。ということは、 a^3b^2c を展開したときの c の次数が 1 であるので、 $(A+c)^6$ を展開したとき c^1 を含む式は ${}_6C_1A^5c^1$ となります。

後は、 a^3b^2c の係数を求めたいんだから $A^5 = (a+b)^5$ を展開したときの a^3b^2 の係数を求めれば OK です。ちなみに $(a+b)^5$ を展開したときの a^3b^2 の係数は ${}_5C_2 = 10$ です。

これらをあわせて $(a+b+c)^6$ を展開したときの a^3b^2c の係数は $6 \cdot 10 = 60$ となります。

【解答】

$a+b = A$ とする。

$$(a+b+c)^6 = (A+c)^6$$

これを展開したとき c の次数が 1 となる項は ${}_6C_1A^5c = 6A^5c = 6(a+b)^5c$

また、 $(a+b)^5$ を展開したときの、 a^3b^2 の係数は ${}_5C_2 = 10$ となる。

よって、 $(a+b+c)^6$ を展開したときの、 a^3b^2c の係数は $6 \cdot 10 = 60$ となる。

今回の問題は、公式を使ったほうが早く解けると思います。ただ、問題によっては解き方を指定している(穴埋め問題など)ことがあるので、両方の解き方を覚えておいた方がいいと思います。それでは、がんばってください。

河見賢司

高校数学の勉強法

<http://www.hmg-gen.com/>

感想はこちらまでメールをください(何か言ってもらえると嬉しいです)

magdai@hmg-gen.com