

「ルールを覚えれば誰でもできる！あなたの数学の偏差値を70にするプリント」の詳細は以下をクリック！

<https://www.hmg-gen.com/tuusin.html>

「自宅に居ながら1対1の数学の授業が受けられます」の詳細は以下をクリック！

<https://www.hmg-gen.com/tuusin1.html>

質問内容

次の問題ってどう解けばいいですか？

問題

次の式の値を求めよ

$$(1) {}_n C_0 + {}_n C_1 + {}_n C_2 + \cdots + {}_n C_n$$

$$(2) {}_n C_0 - {}_n C_1 + {}_n C_2 - \cdots + (-1)^n {}_n C_n$$

回答

そうですね、知らなかったら確かに難しいと思います。実は、この問題は2項定理を使って解いていきます。

2項定理

$$(a + b)^n = {}_n C_0 a^n + {}_n C_1 a^{n-1} b + {}_n C_2 a^{n-2} b^2 + \cdots + {}_n C_{n-1} a b^{n-1} + {}_n C_n b^n$$

2項定理は覚えていたと仮定して、今回の問題を見ると両方とも ${}_n C_0 + {}_n C_1 + \cdots + {}_n C_n$ の形が出てきているよね？この組み合わせの足し算の形が出てきたら、まず間違いなく2項定理を使います。

こんなの知らなかったら思いつけないよね？数学は、考える科目と言っている人も多いけど、こういった地道に暗記していくということがとにかく必要になります。

${}_n C_0 + {}_n C_1 + \cdots + {}_n C_n$ の形を見たら、瞬間的に2項定理を使うのかも？と思えるようになっておいてください。

それでは、問題に進みます。まずは(1)からです。2項定理を使うんだらうな?と思って(1)を見てみると、 ${}_nC_r$ の係数が全て1だよな?こうなるためには、 $(a+b)^n$ で $a=1, b=1$ のときじゃない?これだったら 1^0 っていうのは全部1なので係数もすべて1になってくれて、成立してくれます。

$$\begin{aligned} & {}_nC_0 + {}_nC_1 + {}_nC_2 + \cdots + {}_nC_n \\ & = (1+1)^n \leftarrow \text{2項定理より} \\ & = 2^n \leftarrow \text{これが答え} \end{aligned}$$

これで(1)は終わりました。もし、これで分からないという人は、実際に2項定理の公式 $(a+b)^n = {}_nC_0 a^n + {}_nC_1 a^{n-1}b + {}_nC_2 a^{n-2}b^2 + \cdots + {}_nC_{n-1} a b^{n-1} + {}_nC_n b^n$ に $a=b=1$ を代入して確認をしてみてください。成立しているということを確認できると思います。

次に、(2)に進みます。(2)ですが、 ${}_nC_0 - {}_nC_1 + {}_nC_2 - \cdots + (-1)^n {}_nC_n$ となっていて、 ${}_nC_0 + {}_nC_1 + \cdots + {}_nC_n$ の形が出ているので、これも当然2項定理を使うんだけど、どうなるのかな?

2項定理を使うって分かれば、このくらいすぐに気づけるようになって欲しいんだけど、これって $a=1, b=-1$ のときOKじゃない?分からない人もいるかもしれないので、一応2項定理で展開してみます。

$$\begin{aligned} & \{1 + (-1)\}^n \\ & = {}_nC_0 1^n + {}_nC_1 1^{n-1}(-1) + {}_nC_2 1^{n-2}(-1)^2 + \cdots + {}_nC_n (-1)^n \\ & = {}_nC_0 - {}_nC_1 + {}_nC_2 - \cdots + (-1)^n {}_nC_n \end{aligned}$$

これで、(2)の ${}_nC_0 - {}_nC_1 + {}_nC_2 - \cdots + (-1)^n {}_nC_n$ は ${}_nC_0 - {}_nC_1 + {}_nC_2 - \cdots + (-1)^n {}_nC_n = \{1 + (-1)\}^n = 0$ っていうことが分かります。

$a - b + c - d + \cdots$ というふうにプラスとマイナスが交互にくるという問題は、よく出題されます。このときは、すぐに $(-1)^n$ を思い出すようにしてください。 $(-1)^n$ は、 n が偶数のとき+1に、奇数のとき-1になるよね?数列がらみの問題でよく出題されるので、すぐに気づけるようにしておいてください。

もう分かっていると思うけど、一応答えも書いておきます。

【解答】

$$(1) \quad {}_n C_0 + {}_n C_1 + {}_n C_2 + \cdots + {}_n C_n$$

$$= (1 + 1)^n \leftarrow 2 \text{項定理より}$$

$$= 2^n \leftarrow \text{これが答え}$$

$$(2) \quad {}_n C_0 - {}_n C_1 + {}_n C_2 - \cdots + (-1)^n {}_n C_n$$

$$= \{1 + (-1)\}^n$$

$$= 0 \leftarrow \text{これが答え}$$

今回の解説はこれで終わりです。この類の問題は、「どういうふうに解いたらいいですか？」と本当に多くの人から聞かれます。質問をしにきた人に、今回話した内容を話すと本当にあっという間に納得します。

数学って、もちろん考えることも重要なんですが、考えられるようになるためにはその前提となる知識が必要です。それを、ひとつずつ覚えていくようにしてください。

今回でしたら、「 ${}_n C_0 + {}_n C_1 + \cdots + {}_n C_n$ 」の形は、2項定理を使うぐらいしかない」ということです。こういったことをひとつずつ覚えていけば、「私は数学の能力があまりない。解法があまり思いつかない」という人でも思いつけるようになりますよ。

それでは、がんばってください。

数学って難しいですよ。でも、数学って「このときはこうする」というルールがあってそれをひとつずつ覚えていけば誰でもできるようになります。

「今までの苦労はなんだったの？」と思えるほど、簡単にできるようになりますよ。

「4浪しているのにセンター6割」

→「わずか入会8か月後に島根大学医学部医学科に合格!」

本人いわく「悲惨な成績」で限りなく学年で下位

→「ぐんぐん成績をあげて筑波大学理工学群現役合格!」

「問題が少し難しくなるととたんに解けなくなる」

→「解き方のルールを覚えて難問も解けるようになり東北大学歯学部合格!」

多くの受験生が数学の成績をあげた秘訣を紹介します。

以下の無料メルマガの登録をしてください。無料ですし、いつでも解除できるので登録しないと損ですよ。以下の枠をクリックしてください。

ルールが分かれば誰でもできる！
あなたの数学の偏差値を70にするメルマガ

ラインでも配信しています。ラインの方は以下よりお願いします。

ラインで登録する！

ツイッターやっています

<https://twitter.com/hmggen>

高校数学の勉強法

<https://www.hmg-gen.com/>

医学部数学の勉強法

<https://www.ouen-math.com/>

感想はこちらまでメールをください（何か言ってもらえると嬉しいです）

magdai@hmg-gen.com

河見賢司