質問内容

次の問題ってどう解けばいいですか？

問題
次の式の値を求めよ

(1) ${}_{n}\mathrm{C}_{0} + {}_{n}\mathrm{C}_{1} + {}_{n}\mathrm{C}_{2} + \cdots + {}_{n}\mathrm{C}_{n}$
(2) ${}_{n}\mathrm{C}_{0} - {}_{n}\mathrm{C}_{1} + {}_{n}\mathrm{C}_{2} - \cdots + (-1)^{n}{}_{n}\mathrm{C}_{n}$

回答

そうですね、知らなかったら確かに難しいと思います。実は、この問題は２項定理を使って解いていきます。

２項定理

$$(a+b)^{n} = {}_{n}\mathrm{C}_{0}\, a^{n} + {}_{n}\mathrm{C}_{1}\, a^{n-1}b + {}_{n}\mathrm{C}_{2}\, a^{n-2}b^{2} + \cdots + {}_{n}\mathrm{C}_{n-1}\, a\, b^{n-1} + {}_{n}\mathrm{C}_{n}\, b^{n}$$

２項定理は覚えらていたと仮定して、今回の問題を見ると両方とも ${}_{\circ}\mathrm{C}_{\circ} + {}_{\circ}\mathrm{C}_{\circ} + \cdots + {}_{\circ}\mathrm{C}_{\circ}$ の形が出てきているよね？**高校数学でこの形が出てきたら、まず間違いなく２項定理を使います**。

こんなの知らなかったら思いつけないよね？数学は、考える科目と言っている人も多いけど、こういった地道に暗記していくということがとにかく必要になります。

${}_{\circ}\mathrm{C}_{\circ} + {}_{\circ}\mathrm{C}_{\circ} + \cdots + {}_{\circ}\mathrm{C}_{\circ}$ の形を見たら、瞬間的に２項定理を使うのかも？と思えるようになっておいてください。

それでは、問題に進みます。まずは (1) からです。２項定理を使うんだろうな？と思って (1) を見てみると、${}_{\circ}\mathrm{C}_{\circ}$ の係数が全て１だよね？こうなるためには、$(a+b)^{n}$ で $a=1,\ b=1$ のときじゃない？これだったら 1°っていうのは全部１なので係数もすべて１になってくれて、成立してくれます。

$${}_{n}\mathrm{C}_{0} + {}_{n}\mathrm{C}_{1} + {}_{n}\mathrm{C}_{2} + \cdots + {}_{n}\mathrm{C}_{n}$$

$=(1+1)^{n}$ ◀ ２項定理より

$=2^{n}$ ◀ これが答え

これで (1) は終わりました。もし、これで分からないという人は、実際に２項定理の公式 $(a+b)^{n} = {}_{n}\mathrm{C}_{0}\, a^{n} + {}_{n}\mathrm{C}_{1}\, a^{n-1}b + {}_{n}\mathrm{C}_{2}\, a^{n-2}b^{2} + \cdots + {}_{n}\mathrm{C}_{n-1}\, a\, b^{n-1} + {}_{n}\mathrm{C}_{n}\, b^{n}$ に $a=b=1$ を代入して確認をしてみてください。成立しているということを確認できると思います。

次に、(2) に進みます。(2) ですが、 ${}_nC_0 - {}_nC_1 + {}_nC_2 - \cdots + (-1)^n{}_nC_n$ となっていて、${}_\circ C_\circ + {}_\circ C_\circ + \cdots + {}_\circ C_\circ$ の形が出ているので、これも当然 2 項定理を使うんだけど、どうなるのかな？

2 項定理を使うって分かれば、このくらいすぐに気づけるようになって欲しいんだけど、これって $a = 1$, $b = -1$ のとき OK じゃない？分からない人もいるかもしれないので、一応 2 項定理で展開してみます。

$$\left\{1 + (-1)\right\}^n$$
$$= {}_nC_0\, 1^n + {}_nC_1\, 1^{n-1}(-1) + {}_nC_2\, 1^{n-2}(-1)^2 + \cdots + {}_nC_n\, (-1)^n$$
$$= {}_nC_0 - {}_nC_1 + {}_nC_2 - \cdots + (-1)^n{}_nC_n$$

これで、(2) の ${}_nC_0 - {}_nC_1 + {}_nC_2 - \cdots + (-1)^n{}_nC_n$ は ${}_nC_0 - {}_nC_1 + {}_nC_2 - \cdots + (-1)^n{}_nC_n = \left\{1 + (-1)\right\}^n = 0$ っていうことが分かります。

$a - b + c - d + \cdots$ というふうにプラスとマイナスが交互にくるという問題は、よく出題されます。このときは、すぐに $(-1)^n$ を思い出すようにしてください。$(-1)^n$ は、n が偶数のとき $+1$ に、奇数のとき -1 になるよね？数列がらみの問題でよく出題されるので、すぐに気づけるようにしておいてください。

もう分かっていると思うけど、一応答えも書いておきます。

【解答】

(1)

${}_nC_0 + {}_nC_1 + {}_nC_2 + \cdots + {}_nC_n$

$=(1 + 1)^n$ ◀ 2 項定理より

$=2^n$ ◀ これが答え

(2)

${}_nC_0 - {}_nC_1 + {}_nC_2 - \cdots + (-1)^n{}_nC_n$

$=\left\{1 + (-1)\right\}^n$

$=0$ ◀ これが答え

今回の解説はこれで終わりです。この類の問題は、「どういうふうに解いたらいいですか？」と本当に多くの人から聞かれます。質問をしにきた人に、今回話した内容を話すと本当にあっという間に納得します。

数学って、もちろん考えることも重要なんですが、考えられるようになるためにはその前提となる知識が必要です。それを、ひとつずつ覚えていくようにしてください。

今回でしたら、「${}_{\circ}\mathrm{C}_{\circ} + {}_{\circ}\mathrm{C}_{\circ} + \cdots + {}_{\circ}\mathrm{C}_{\circ}$ の形は、２項定理を使うぐらいしかない」ということです。こういったことをひとつずつ覚えていけば、「私は数学の能力があまりない。解法があまり思いつかない」という人でも思いつけるようになりますよ。

それでは、がんばってください。

河見賢司

高校数学の勉強法
http://www.hmg-gen.com/

感想はこちらまでメールをください（何か言ってもらえると嬉しいです）
magdai@hmg-gen.com