

高校3年生 H さんからの質問です。

質問内容

絶対値の話です。今までなにげなく使っていましたがなぜ  $|AB| = |A||B|$  が成立するのか分かりません。教えてください。

回答

そうですね。絶対値の公式は簡単に導くことができますよ。まずは、絶対値の公式については次の3つを覚えておいてください。

絶対値の公式

$$|A|^2 = A^2$$

$$|AB| = |A||B|$$

$$|-A| = |A|$$

まずは一つ目の  $|A|^2 = A^2$  について、説明します。絶対値の外し方は知っていると思うけど一応書いておきます。

絶対値の外し方

$$|A| = \begin{cases} A & (A \geq 0) \\ -A & (A < 0) \end{cases}$$

↑絶対値の中身が正のときはそのまま絶対値を外し、絶対値の中身が負のときは、絶対値を外すときにマイナスをつける。

$|A| = \pm A$  なんだから、当然  $|A|^2 = (\pm A)^2 = A^2$  で、一つ目の  $|A|^2 = A^2$  は成立します。

次に二つめの  $|AB| = |A||B|$  を示します。一応厳密に証明してみますね。絶対値は絶対値の中身によって場合分けをするんだから、今回は次の4通りあります。

(i)  $A \geq 0, B \geq 0$       (ii)  $A \geq 0, B < 0$       (iii)  $A < 0, B \geq 0$       (iv)  $A < 0, B < 0$

(i)  $A \geq 0, B \geq 0$  のとき

$$\text{(左辺)} = |AB|$$

$$= AB \quad \leftarrow AB \geq 0 \text{ より}$$

$$\text{(右辺)} = |A||B|$$

$$= AB \quad \leftarrow A \geq 0, B \geq 0 \text{ より}$$

$$= \text{(右辺)} //$$

(ii)  $A \geq 0, B < 0$  のとき

$$\begin{aligned} \text{(左辺)} &= |AB| \\ &= -AB \quad \blacktriangleleft AB \leq 0 \text{ より} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(右辺)} &= |A||B| \\ &= A(-B) \quad \blacktriangleleft A \geq 0, B < 0 \text{ より} \\ &= -AB = \text{(右辺)} // \end{aligned}$$

(iii)  $A < 0, B \geq 0$  のとき

$$\begin{aligned} \text{(左辺)} &= |AB| \\ &= -AB \quad \blacktriangleleft AB \leq 0 \text{ より} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(右辺)} &= |A||B| \\ &= (-A)B \quad \blacktriangleleft A < 0, B \geq 0 \text{ より} \\ &= -AB = \text{(右辺)} // \end{aligned}$$

(iv)  $A < 0, B < 0$  のとき

$$\begin{aligned} \text{(左辺)} &= |AB| \\ &= AB \quad \blacktriangleleft AB \geq 0 \text{ より} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(右辺)} &= |A||B| \\ &= (-A)(-B) \quad \blacktriangleleft A < 0, B < 0 \text{ より} \\ &= AB = \text{(右辺)} // \end{aligned}$$

今回は、証明するためわざわざ4通りしましたが、こんなのすぐに分かるよね。今回は、 $|AB| = |A||B|$  が分からないとのことですが、これなんかはあっていることの確認だけだったら例えば  $A = -1, B = -1$  なんかを代入したら、すぐに  $|AB| = |A||B|$  が成立していることを確認できると思います。

この作業って意外に重要なんですが、公式がうる覚えのときは簡単な数字を代入して公式が確かに成立していることを自分で確認して解いていきます。

本来なら、公式はしっかりと暗記しておかないといけないんですが、出題頻度が高くない場合は忘れているというか、うる覚え(なんとなく公式を覚えていて、それが正確な形が分からない。もしかしたら間違っていて覚えているかもしれない)場合がでてくると思います。そういった場合は、簡単な数字を代入して、そのうる覚えな公式があっているかどうか確認してください。

当たり前なんですが、計算結果が間違っている場合その公式は間違っていて暗記してしまっています。

簡単な数字を代入して確かめてみると、うる覚えの公式なんかでも、自分でその公式があっているかどうか確認しながら進めることができるので、実際の試験会場でも安心して進めることができますよね。

では、最後の公式に進みます。最後の公式  $|-A| = |A|$  です。これは簡単ですよ。先ほどの公式  $|AB| = |A||B|$  を使うだけです。一応示しておきます。

$$\begin{aligned} |-A| &= |-1 \times A| \leftarrow -A = -1 \times A \text{ より} \\ &= |-1||A| \leftarrow |AB| = |A||B| \text{ の公式より} \\ &= |A| \leftarrow |-1| = 1 \text{ より、公式が導けた！} \end{aligned}$$

簡単な公式でもなんでなりたっているのか分からない場合がありますよね。そんなとき、ちゃんと証明するのがもちろん理想なんですが、面倒な場合先ほど説明したように簡単な数字を代入してそれが確かになる立つということを自分で確認してみてください。それだけでだいぶ腑に落ちると思いますよ。

それではがんばってください。

河見賢司

高校数学の勉強法

<http://www.hmg-gen.com/>

感想はこちらまでメールをください（何か言ってもらえると嬉しいです）

[magdai@hmg-gen.com](mailto:magdai@hmg-gen.com)