質問内容

次のような問題が分かりません。どう解けばいいですか？

(1) $\sin\theta = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ のとき、$\cos\theta$ と $\tan\theta$ の値を求めよ。ただし、$90^\circ \leqq \theta < 180^\circ$ とする。

(2) $8\sin\theta - \cos\theta = 7$ のとき、$\tan\theta$ の値を求めよ。ただし、$0^\circ \leqq \theta < 90^\circ$ とする。

こんにちは、河見賢司です。

こういうふうに $\sin\theta$, $\cos\theta$, $\tan\theta$ のいずれかの値が分かっていて、他の $\sin\theta$, $\cos\theta$, $\tan\theta$ を求める問題ってふた通りの解法が存在します。

(i) 三角関数の相互関係を使った解法。(ii) 図形を使って求める解法。学校では、ほとんどのところで (i) の三角関数の相互関係を使った解法だけで解いて、(ii) の図形を使って求める解法は説明すらしないというところも多いです。ですが、実は図形を使ったほうが計算が楽になる場合が多いのでしっかりと理解しておいてください。

【(1) の解説】
図を使った解法の方が簡単ですが、まずは三角関数の相互関係を使った解き方で解きたいと思います。三角関数の相互関係と言えば、次の 3 つの公式をすぐに頭に思い浮かべられるようにしておいてください。

三角関数の相互関係

① $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

② $\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$

③ $1 + \tan^2\theta = \dfrac{1}{\cos^2\theta}$

今回は $\sin\theta = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ って分かっているんだから、$\sin\theta = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ を $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ に代入をしたら、$\cos\theta$ の値を求めることができるよね？

$\cos\theta$ が求まったから、後は $\tan\theta$ の値を求めたらいいんだけで、$1 + \tan^2\theta = \dfrac{1}{\cos^2\theta}$ の公式にいれてもらってもできると思うけど、これは 2 次方程式になって少し面倒なので

$\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ に代入をした方が簡単に求めることができます。

【(1) の解答】

$\sin\theta = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ を $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ に代入すると

$$\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + \cos^2\theta = 1$$

$$\frac{1}{3} + \cos^2\theta = 1$$

$$\cos^2\theta = 1 - \frac{1}{3}$$

$$\cos^2\theta = \frac{2}{3}$$

$$\cos\theta = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$= \pm\frac{\sqrt{6}}{3}$$

ここで、$90^\circ \leqq \theta < 180^\circ$ より、$\cos\theta < 0$ を考え ◀(注) を見よ

$\cos\theta = -\dfrac{\sqrt{6}}{3}$ となる。

(注) $90^\circ \leqq \theta < 180^\circ$ のときは、当然 $\cos\theta < 0$ だよね？この問題は、ほとんどの人が気づけたと思うけど、次のことを覚えておいてほしいです。

数学の解答について

> 数学の解答は、１つになることが多い。だから、問題を解いて複数の答えが出てきたときは、より詳しく条件をみるようにすること！

⇑もちろん複数出てきても、答えがひとつにならないこともあります。ですけど、２つ以上 (２つのことが多い) の答えが出てきたときはどちらか一方が不適となって、答えがひとつのみになるということが本当に多いです。

本来でしたら、普段から条件を満たしているかしっかりと確認をしながら解く必要がありますが、そうは言っても見落としてしまうこともあります。

ですから、答えが２つ以上出てきたときは、いつもより丁寧に求まった答えが問題文の条件を満たしているか確認をするようにしてください。それでは、解答に戻ります。

$\sin\theta = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ と $\cos\theta = -\dfrac{\sqrt{6}}{3}$ を $\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ に代入をすると、

$\tan\theta = \dfrac{\dfrac{1}{\sqrt{3}}}{-\dfrac{\sqrt{6}}{3}} = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ ◀(注) を見よとなる。

(注) 分数の中に分数があるときは分母分子に適当な数をかけて分数の中の分数を消去してから考えていきます。

$$\tan\theta = -\dfrac{\dfrac{1}{\sqrt{3}}}{-\dfrac{\sqrt{6}}{3}}$$

$$= -\dfrac{\dfrac{1}{\sqrt{3}}\cdot 3}{\dfrac{\sqrt{6}}{3}\cdot 3}$$ ◀ 分母分子に 3 をかけた！

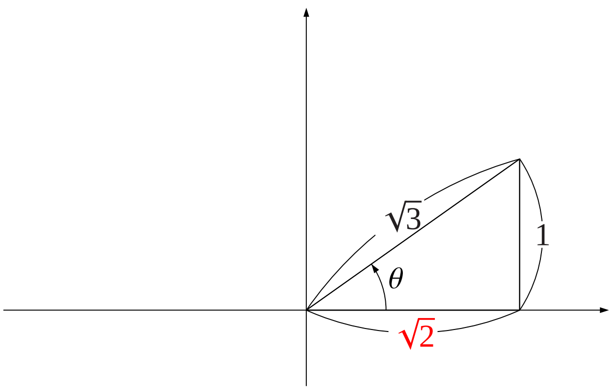
$$= -\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}}$$ ◀ $\dfrac{1}{\sqrt{3}}\cdot 3 = \dfrac{1}{\cancel{\sqrt{3}}}\cdot\cancel{\sqrt{3}}\sqrt{3} = \sqrt{3}$ より

$$= -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$$

【(1) の解答】

次に図を使った解法です

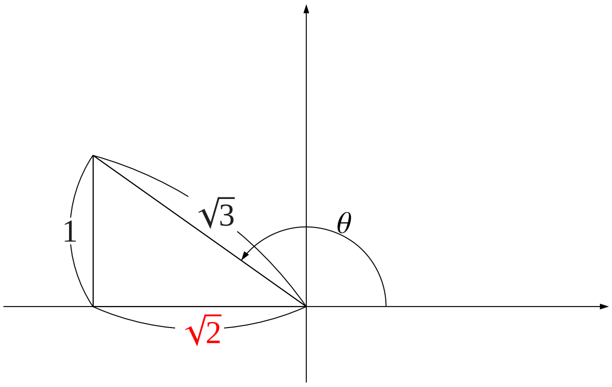
$\sin\theta = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ を図示すると、次の 2 通り



⇑ $\sqrt{2}$ は三平方の定理を使って求めました。

これは $90^\circ \leqq \theta < 180^\circ$ より不適

⇑ 問題文に $90^\circ \leqq \theta < 180^\circ$ とかかれている。上図のときは、θ は第 1 象限にあるので $0^\circ < \theta < 90^\circ$ となる。これは明らかに不適



図より、$\cos\theta = -\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = -\dfrac{\sqrt{6}}{3}$, $\tan\theta = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

【(2) の解説】
(2) は $8\sin\theta - \cos\theta = 7$ のとき $\tan\theta$ を求めよ、という問題です。どうしようかな？と思うけど $\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ という関係式があるので、$\sin\theta$ と $\cos\theta$ の値さえ求めることができたなら $\tan\theta$ の値を求めることができるよね？そこで、まずは $\sin\theta$ と $\cos\theta$ の値を求めることにします。

で、$\sin\theta$ と $\cos\theta$ の値をどうやって求めようかな？って思うんだけど、$8\sin\theta - \cos\theta = 7$ って $\sin\theta$ と $\cos\theta$ に関する関係式がひとつ与えられているから、何かもうひとつ $\sin\theta$ と $\cos\theta$ の関係式があれば $\sin\theta$ の値と $\cos\theta$ の値を求められるんじゃない？

(注)「変数が n 個のとき、その n 個の変数を求めるには、その変数に関する関係式が n 個必要」

このことは知っていたかな？中学生のときに連立方程式を解いたと思うけど、変数が 2 つのときは式が 2 つだったよね？変数が 3 つになっていたら、式が 3 つ与えられていたと思います。

変数が n 個のときは、関係式が n 個必要です。これって意外に使える事実です。例えば a, b, c という 3 つの変数を求めよという問題で、a, b, c に関する関係式が 2 つ分かっているとします。

変数 3 つを決定するには、関係式 3 つ必要です。関係式 2 つが分かっているので、変数を決定するにはなんとかして残りひとつの関係式を求める必要があります。

当たり前なんですけど、解けない問題は出題されません。先ほどのような場合、絶対に a, b, c に関する関係式をどうにかして求められるはずです (そうじゃないと a, b, c の値

を求めることができない)。

何気なく探していたら気づきにくいものでも、「必ず関係式があるんだ」というふうに頭に叩き込んで問題を解けば気づけるようになります。話が少しそれましたが、本当に重要な性質なので覚えておいてください。それでは、問題に戻ります。

で、$8\sin\theta - \cos\theta = 7$ 以外の $\sin\theta$ と $\cos\theta$ の関係式があとひとつ必要なんだけど … これは、もうすぐに気づけるよね？そう三角関数の相互関係の式 $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ です。

後は、この 2 つの関係式を連立して、$\sin\theta$ と $\cos\theta$ の値を求めて、そこから $\tan\theta$ の値を求めれば、問題終了です。少し計算が面倒ですけど、ただ単に問題を解いていくだけですので、がんばってください。

【解答】
三角関数の相互関係より $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

$$\begin{cases} 8\sin\theta - \cos\theta = 7 \cdots ① \\ \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1 \cdots ② \end{cases}$$

① より、$\cos\theta = 8\sin\theta - 7 \cdots ①'$ とする。$①'$ を ② に代入して

$$\sin^2\theta + (8\sin\theta - 7)^2 = 1$$
$$\sin^2\theta + 64\sin^2\theta - 112\sin\theta + 49 = 1$$
$$65\sin^2\theta - 112\sin\theta + 48 = 0$$
$$(13\sin\theta - 12)(5\sin\theta - 4) = 0$$

よって、$\sin\theta = \frac{12}{13}, \frac{4}{5}$

$\sin\theta = \frac{12}{13}$ を $①'$ に代入して

$$\begin{aligned} \cos\theta &= 8 \cdot \frac{12}{13} - 7 \\ &= \frac{96}{13} - \frac{91}{13} \\ &= \frac{5}{13} \end{aligned}$$

次に $\sin\theta = \frac{4}{5}$ を $①'$ に代入して

$$\cos\theta = 8\cdot\frac{4}{5} - 7$$
$$= \frac{32}{5} - \frac{35}{5}$$
$$= -\frac{3}{5}$$

$0^\circ \leqq \theta < 90^\circ$ のとき $\cos\theta > 0$。よってこの場合不適。

以上より $\sin\theta = \dfrac{12}{13}$, $\cos\theta = \dfrac{5}{13}$ となる。

$\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ より

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$
$$= \frac{\frac{12}{13}}{\frac{5}{13}}$$
$$= \frac{12}{5}$$ ◀ これが答え！

今回の問題はどうだったでしょうか？このタイプの問題はよく出題されます。コチラのページで、同じような問題を解説しています。三角関数の相互関係の公式がなぜ成立するかなど、より詳しく説明しています。興味のある人は見てください。http://www.hmg-gen.com/sankaku3.pdf

それでは、がんばってください。

河見賢司

高校数学の勉強法
http://www.hmg-gen.com/

感想はこちらまでメールをください（何か言ってもらえると嬉しいです）
magdai@hmg-gen.com