

教えている高校1年生の生徒から授業中に質問された内容です。

質問内容

$$\begin{cases} x^2 + xy + 1 = 0 \cdots \textcircled{1} \\ x^2 + x + y = 0 \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

上記の方程式なんですけど、連立方程式の解法ってどちらかの1文字を消去して片方だけの文字にして解いていくのが基本ですよ。

私は、②の式を変形して  $y = -x^2 - x$  を①に代入して解いていったのですが、問題集の解答は違う方法でしていました。

①-②をしているんですけど、なぜこうしているかわかりません。教えてください。

## 回答

確かにこの解法って思いつかないですよ。

別に②を変形をした  $y = -x^2 - x$  を①に代入する方法でも解くことができますよ。

でも、この解法だと  $\textcircled{1} \Rightarrow x^2 + x(x^2 - x) + 1 = 0$  ってなるけど、これは3次式だよ。

3次式の方程式は、組立除法を使って解いていかないとダメだから、少し面倒なんです。といっても、3次方程式くらいはしょっちゅう出てくるのでこの解法を使ってもらってもいいのですが…

これまでの連立方程式は、1文字消去して解いていくことが基本だったと思います。これは、「数学は、変数が多ければとにかく考えにくい」という考えから来ています。

これと同じように覚えておいてほしいんですが、「数学は、次数が高いほど考えにくい」という考えもあります。

次数が高いほど考えにくいんだから、とにかく次数が低くなる方向にもっていきます。次数を低くする方向にもっていくと、なぜだかわからないけどうまくいくことが多いです。

今回は①-②をするんですが、この理由は、そう式変形をすると次数の高い  $x^2$  が消えてくれるよね。だから、①-②をただけです。

この連立方程式の解法はあまり出てくるわけではありませんが、「共通解」に関する問題

ではこの手法で解くことが多いです。ですが、それよりも今回覚えてほしいことは、「次数が高ければ考えにくいので、とにかく次数を低くするように式変形をする」です。

次数を低くする方向に式変形をすれば、考えやすくなったり、うまく打ち消しあってくれたり、うまい具合に問題ができていくことが多く、問題を解くことができます。

次数を低くしてもうまくいかない(他の手法で解いていく)場合ももちろんありますが、次数を低くしてから考える場合が圧倒的に多いです。では、問題に戻ります。

【解答】

$$\begin{cases} x^2 + xy + 1 = 0 \cdots \textcircled{1} \\ x^2 + x + y = 0 \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

① - ② より

$$xy - x + 1 - y = 0$$

$$x(y - 1) - (y - 1) = 0 \quad \blacktriangleleft \text{共通因数 } (y - 1) \text{ ができた}$$

$$(x - 1)(y - 1) = 0 \quad \blacktriangleleft \text{因数分解をした}$$

よって、 $x - 1 = 0$  または  $y - 1 = 0$   $\Leftarrow$  かけて0となるのは、どちらか一方が0

$x - 1 = 0$  つまり  $x = 1$  のとき、②に  $x = 1$  を代入すると  $1 + 1 + y = 0$  より  $y = -2$

$y - 1 = 0$  つまり  $y = 1$  のとき、①に  $y = 1$  を代入すると  $x^2 + x + 1 = 0$  となるが、これを満たす実数  $x$  は存在しない。 $D = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = -3 < 0$  より実数解なし

以上より、連立方程式の解は  $(x, y) = (1, -2)$

今日説明したかった内容は、高校数学では次数が高いほど考えにくい、次数が高いときは低くもっていくことが多いということです。これ、ホントに重要なんですが、意外に理解できていない人が多いです。しっかりと覚えておいてください。

河見賢司

目指せ偏差値45から55! 高校数学の勉強法

<http://www.hmg-gen.com/>

感想はこちらまでメールをください(何か言ってもらえると嬉しいです)  
magdai@hmg-gen.com