高校 3 年生 H くんからの質問です。

質問内容

「ベクトルの外積を知っていたら便利だよ」と聞いたのですが、ベクトルの外積ってどういうふうに使えますか？

回答

こんにちは河見です。ベクトルの外積は高校の教育課程の範囲外ですが、知っているといろいろ便利ですよ。

教科書の範囲外ですのでできるだけ解答欄には書かない方がいいと思いますが、空間図形の三角形の面積を求める時、また平面と直交するベクトルを求める時は外積で計算したほうが圧倒的に速いです。

外積については「何それ？」という人も多いと思うのでまずは定義から説明しておきますね。

外積

$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (x_1, y_1, z_1),\ \overrightarrow{\mathrm{AC}} = (x_2, y_2, z_2)$ のとき、
$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ の外積 $\overrightarrow{\mathrm{AB}} \times \overrightarrow{\mathrm{AC}} = (y_1z_2 - y_2z_1,\ z_1x_2 - z_2x_1,\ x_1y_2 - x_2y_1)$ となる。

【注】

$\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}}$ で $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ 内積 $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ と読んだのと同じ感じで、$\overrightarrow{\mathrm{AB}} \times \overrightarrow{\mathrm{AC}}$ で $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ 外積 (がいせき)$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ と読みます。

ここで多くの人が $\overrightarrow{\mathrm{AB}} \times \overrightarrow{\mathrm{AC}} = (y_1z_2 - y_2z_1,\ z_1x_2 - z_2x_1,\ x_1y_2 - x_2y_1)$ 長くて覚えられないよと思った人がいると思います。でもこれって簡単な覚え方があるんです。

外積の覚え方

ステップ 1 まず $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (x_1, y_1, z_1)$ の成分と $\overrightarrow{\mathrm{AC}} = (x_2, y_2, z_2)$ の成分を縦書きにします。

$$\begin{matrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{matrix}$$

ステップ 2 $z_1 \quad z_2$ の下にさらに $x_1 \quad x_2$ を書きます。

$$\begin{matrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \\ x_1 & x_2 \end{matrix}$$

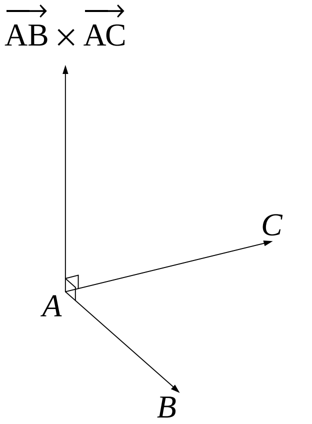
ステップ 3 ①, ②, ③ を互いにクロスにかける

$$\begin{matrix} x_1 & & x_2 \\ & ③ & \\ y_1 & & y_2 \\ & ① & \\ z_1 & & z_2 \\ & ② & \\ x_1 & & x_2 \end{matrix}$$

① をクロスにかけたものは $y_1z_2 - y_2z_1 \Leftarrow$ これが外積の x 座標
② をクロスにかけたものは $z_1x_2 - z_2x_1 \Leftarrow$ これが外積の y 座標
③ をクロスにかけたものは $x_1y_2 - x_2y_1 \Leftarrow$ これが外積の z 座標

外積は上記のように成分を出すということを覚えておいてください。数学 C を勉強している人なら分かると思いますが、クロスにかけるっていうのは行列のところで勉強をした行列式とまったく同じだよね。

次に外積の性質を話します。



性質 ①$\cdots \overrightarrow{\mathrm{AB}} \times \overrightarrow{\mathrm{AC}}$ は左図のように $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ の
両方のベクトルと垂直である。

性質 ②$\cdots \triangle\mathrm{ABC}$ の面積を S とすると、
$S = \dfrac{1}{2}\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}} \times \overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|$ である。

上記の性質を使えば空間ベクトルの問題は本当に計算が楽になります。では、実際にベクトルの外積を利用する問題を 2 問ほど解いてもらいます。

問題 1

$\vec{a} = (0,\ 2,\ 1),\ \vec{b} = (2,\ -2,\ 1)$ の両方に垂直で大きさが 1 のベクトルを求めよ。

【解説】
外積を使った解法と、一般的な教科書に載っている解法があります。まずは、外積を使わない解法で解いて、そのあと外積を使った解法で解いていきます。

【解答】（教科書に載っている解法）

求めるベクトルを $\vec{p} = (l,\ m,\ n)$ とする。

$\vec{p}$ の大きさは 1 なので $\left|\vec{p}\right| = 1 \Leftrightarrow\ l^2 + m^2 + z^2 = 1 \cdots$①

また、$\vec{p}$ は $\vec{a}$ と $\vec{b}$ に垂直なので

$\vec{p} \cdot \vec{a} = 0 \Leftrightarrow\ 0 \cdot l + 2 \cdot m + 1 \cdot n = 0 \cdots$②

$\vec{p} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow\ l + (-2) \cdot m + 1 \cdot n = 0 \cdots$③

①, ②, ③ を連立して

$(l, m, n) = (\frac{2}{3},\ \frac{1}{3},\ -\frac{2}{3}),\ (-\frac{2}{3},\ -\frac{1}{3},\ \frac{2}{3})$ となる。

【解答】(外積を使った解法)

外積の性質を見てもらいたいのですが、$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ は $\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{AC}$ の両方のベクトルと垂直である。この性質を使ったら、二つのベクトルに垂直がベクトルってすぐに求まるよね？

平面と垂直なベクトルを求めることはよくありますが、平面と垂直なベクトルとは平面上の 2 つの 1 次独立 (大きさが 0 でなく、互いに並行でないベクトルのこと) なベクトルと直交するということが条件なので、2 つのベクトルと垂直なベクトルを求めることはままあります。

$\vec{a} \times \vec{b} = (4, 2, -4)$

外積を使うことで $\vec{a}, \vec{b}$ の両方に垂直なベクトルの方向ベクトルが $(4, 2, -4)$ となることが求まりました。求めたいベクトルは大きさが 1 なので、$\left|\vec{a} \times \vec{b}\right|$ の大きさで割ったものが答えとなります。直交するベクトルは 2 つあり。例えば $\vec{n}$ が $\vec{a}$ と $\vec{b}$ に直交するなら、$-\vec{n}$ も $\vec{a}$ と $\vec{b}$ に直交します

$\left|\vec{a} \times \vec{b}\right| = \sqrt{4^2 + 2^2 + (-4)^2} = 6$

よって $\vec{p} = \pm\dfrac{1}{6}(4, -2, 4) = \pm\dfrac{1}{3}(2, -1, 2)$

2 通りの解法で解いてみましたが、外積のほうがはるかに簡単ということが分かったと思います。でも、残念なことに外積は高校数学の範囲外なので、解答には書かないほうがベターです。

そこで、解答では【教科書の解答】で連立方程式を解いて、と書きましたが、3 元連立の方程式は面倒なので、それ以降の計算は外積でして、解答にはよって求めるベクトルは $\cdots$ と書いてもらえばいいと思います。では、次の問題に進みます。

問題 2

$\overrightarrow{AB} = (0, 2, 1),\ \overrightarrow{AC} = (2, -2, 1)$ のとき、$\triangle ABC$ の面積を求めよ。

これも普通に解こうと思えばベクトルの三角形の公式

$$S = \frac{1}{2}\sqrt{\left|\overrightarrow{AB}\right|^2\left|\overrightarrow{AC}\right|^2 - (\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC})^2}$$

を使うために、$\left|\overrightarrow{AB}\right|, \left|\overrightarrow{AC}\right|$ を求め、さらに $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ を求めて、解いていけばいいのですがこれでは少し面倒です。そこで、外積の性質 $S = \dfrac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right|$ を使います。

$\overrightarrow{\mathrm{AB}} \times \overrightarrow{\mathrm{AC}} = (4, 2, -4)$ より $\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}} \times \overrightarrow{\mathrm{AC}}\right| = 6$ です。これより $S = \dfrac{1}{2}\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}} \times \overrightarrow{\mathrm{AC}}\right| = 3$ となります。

解答は、次のように書いておけば十分でしょう。計算は、もちろん外積を使ってパパッと解いておきます。

【解答】

$$(\triangle\mathrm{ABC}\text{ の面積}) = \frac{1}{2}\sqrt{\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|^2\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|^2 - (\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}})^2}$$
$$= 3$$

外積は、分かってもらえましたでしょうか？外積を知らないと解けない問題は出題されませんが、外積を使ったほうが圧倒的に計算が楽になるということが多いです。

センター試験でも、外積を使える問題がたまに出題されます。外積の使い方は本当に簡単だと思うので、今日話した内容を理解してもらって、実際の試験でもどんどん外積を活用してください。

河見賢司

目指せ偏差値４５から５５！高校数学の勉強法
http://www.hmg-gen.com/

感想はこちらまでメールをください（何か言ってもらえると嬉しいです）
magdai@hmg-gen.com