

質問内容

$a > 0, b > 0$ のとき、 $\frac{b}{a} + \frac{a}{b} \geq 2$ を示せ

学校で上記のような問題を解きました。相加相乗平均を使って解くみたいなんです。言われたら相加相乗平均を使うって気づくんですけど、相加相乗平均ってどういったときに使うのですか？

こんにちは、河見賢司です。教えている高校1年生が上記のような質問をしてきました。相加相乗平均をどういった時に使うか知らない人が多いので、解説することにします。

相加相乗平均のことを知らない人もいるかもしれませんので、まとめておきます。

相加相乗平均

$a > 0, b > 0$ のとき、 $a + b \geq 2\sqrt{ab}$ が成立する。

等号成立は $a = b$ のとき

簡単に証明もできるので、証明をしておきます。

【証明】

$$\begin{aligned}(\text{左辺}) - (\text{右辺}) &= a + b - 2\sqrt{ab} \\ &= (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0 \quad \blacktriangleleft (\text{注}) \text{を見よ}\end{aligned}$$

等号成立は $\sqrt{a} = \sqrt{b}$ つまり $a = b$ のとき

(注) $a + b - 2\sqrt{ab} = (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2$ この式変形なかなか気づかないかもしれないけど、右辺の $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2$ を展開したら確かに $a + b - 2\sqrt{ab}$ となっているのが確認できるよね？

なかなか気づきにくいかもしれないけど、不等式の証明は $()^2$ の形にして証明するのが一般的です。このことを頭に入れておけばすぐに気づけると思います。

で、ここからが本題なんですけど相加相乗平均をどういった時に使うかと言った話です。

以下の条件を満たしている時は、ほぼ相加相乗平均を使うとっていいと思います。

相加相乗平均を使うとき

- ① 文字に正という条件がある。
- ② 和の形で表されていて、その2つを互いに掛け合わせると変数(文字)が消えるとき

上記のようになっているときは、まず間違いなく相加相乗平均を使います。

このことを踏まえて、元の問題に戻ります。もう一度、元の問題を見てみると

問題

$$a > 0, b > 0 \text{ のとき、 } \frac{b}{a} + \frac{a}{b} \geq 2 \text{ を示せ}$$

まずは、 $a > 0, b > 0$ という条件が与えられているから、先ほどの①の条件である「文字に正という条件がある」を満たしているよね？

次に、②の条件の「和の形で表されていて、その2つを互いに掛け合わせると変数(文字)が消えるとき」を確認していくけど、 $\frac{b}{a} \cdot \frac{a}{b} = 1$ となるから互いにかけてあげたら変数が消えるよね？これで条件②も満たしています。

条件①と②を満たしているから、「まあ、相加相乗平均を使うんだらうな」と思えるようにしておいてください。

それでは、解答に進みます。

【解答】

$a > 0, b > 0$ より $\frac{b}{a} > 0, \frac{a}{b} > 0$ が言える。相加相乗平均より

$$\frac{b}{a} + \frac{a}{b} \geq 2 \sqrt{\frac{b}{a} \cdot \frac{a}{b}} = 2$$

よって、 $\frac{b}{a} + \frac{a}{b} \geq 2$

また、等号が成立するのは $\frac{b}{a} = \frac{a}{b}$ のときで

$$\frac{b}{a} = \frac{a}{b}$$

$$b^2 = a^2 \quad \blacktriangleleft \text{(注) を見よ}$$

$a > 0, b > 0$ を考え $a = b$ のとき \blacktriangleleft 証明終了

(注) $\frac{b}{a} = \frac{a}{b} \Leftrightarrow b^2 = a^2$ について

意外に知らない人が多いのですが、(分数)=(分数)の問題は対角にかけます。

(分数)=(分数)の計算法

$\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$ のとき、 $AD = BC$ が成立する。

$$\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$$

$$\frac{A}{B} \cdot BD = \frac{C}{D} \cdot BD \quad \blacktriangleleft \text{分数を消去するために両辺に } BD \text{ をかけた}$$

$$AD = BC$$

今回の問題は、本当に簡単な問題なのである程度数学ができる人にとっては「簡単だよ」と思うような内容かもしれませんが、問題としては簡単ですが、相加相乗平均をどういったときに使うかということを知らない人が多いんです。正という条件があって、分数で足し合わせたような形になっているときは相加相乗平均を使うのでは？と考えられるようにしておいてください。

相加相乗平均は、学校では適当にしか勉強しないところが多いですが本当に頻出です。いざ受験問題を解くときは、イヤと言っているほど相加相乗平均が出てくるので今のうちからしっかりと相加相乗平均を理解しておくようにしてください。

河見賢司

高校数学の勉強法

<http://www.hmg-gen.com/>

感想はこちらまでメールをください(何か言ってもらえると嬉しいです)

magdai@hmg-gen.com