質問内容

x, y, z が正の数で、$xy+yz+zx=1$ のとき、$(x+y+z)^2 \geqq 3$ であることを証明せよ。

上記の問題です。答えをみると「ああ、そうやってするんだな」ととりあえずは、理解できるんですが、こんな解法なかなか思いつきません。どうしたら思いつけるようになりますか？

回答

こんにちは、河見賢司です。そうですね。確かに難しいと思います。「思いつけるようになってください」としか言いようがないのですが、少し考え方を話したいと思います。

その前に、解答を書いておきたいと思います。

【解答】

$$
\begin{aligned}
(\text{左辺})-(\text{右辺}) &= (x+y+z)^2-3 \\
&= (x+y+z)^2-3\cdot 1 \\
&= (x+y+z)^2-3(xy+yz+zx) \blacktriangleleft 1=xy+yz+zx\ \text{を代入した} \\
&= x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx-3xy-3yz-3zx \\
&= x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx \\
&= \frac{1}{2}(2x^2+2y^2+2z^2-2xy-2yz-2zx) \\
&= \frac{1}{2}\left\{(x^2-2xy+y^2)+(y^2-2yz+z^2)+(z^2-2zx+x^2)\right\} \\
&= \frac{1}{2}\left\{(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\right\} \geqq 0
\end{aligned}
$$

等号は、$x=y=z$ のときに成立する。//

確かに思いつきにくいですよね。これは以前にも話したことがありますが、「数学の問題って解く前から解き方が分かっている訳ではないんです。いろいろとやってみて、とりあえずうまくいった解き方を解答にしている」だけです。

ですから、数学の問題を見たときは、「あーでもない。こーでもない」ととにかく解ける可能性のある解法をしらみつぶしに探していきます。

このことを頭に入れて、この問題を考えていきます。

まず不等式の証明ですが、文字に範囲が与えられている場合は因数分解を使ったり、相加相乗平均を使うこともありますが、範囲が与えれていない場合、式変形をして $(\quad)^2+(\quad)^2$ の形に式変形をしていくことが多いです。

次に、**数学は与えられた条件は１００パーセント使い切ります**。今回は、$xy+yz+zx=1$ という条件が与えられているので、この条件をなんとか使わないといけません。

もしこれが $x+y+z=1$ なんていう条件なら $z=1-x-y$ なんかと式変形をして、代入することで z を文字消去して考えることができます。ちなみに、**数学では、文字消去できるときはとにかく文字消去してから考える**というのも重要な性質です。

$x+y+z=1$ だったら文字消去もできますが、$xy+yz+zx=1$ だったら文字消去することはできない。もちろん $(y+x)z=1-xy$ と変形してから $z=\dfrac{1-xy}{y+x}$ としたら文字消去できないわけではないが、分数になるのであまりに汚い … こんなことをするはずがない … と考えます。

そこで、何か別の解法はないのかな？と考えるんだけど、不等式の証明は $(\quad)^2$ の形が出てこないといけない。

よく分からないけど $(x+y)^2$ とかを使いそう。$(x+y)^2$ とかだったら x^2+y^2+2xy と $2xy$ が出てくるよね？じゃあ、あまりやらない手法だけど 1 に $1=xy+yz+zx$ を代入してみるのはどうだろう？となんとなく発想できるよね。

さっきも話したけど、数学は与えられた条件をすべて使いきらないといけない。1 に $xy+yz+zx$ を代入することで $xy+yz+zx=1$ という条件も使ったことになるし、これなら不等式の証明の $(\quad)^2+(\quad)^2$ の形にすることができそう …

こういうふうに考えていきます。数学は、特に受験問題になると本当に解き方が分からないということが少なくありません。

そういったときは、小さな手掛かりを元にとにかく解ける可能性のある方法をしらみつぶしに考えていきます。まだ、受験問題を解いたことのない人にとっては伝わりにくいかもしれませんが、とにかく「そんなもんだな」という感じで何となくでいいので頭の片隅に入れておいてください。

最後に、$x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx$ の式変形に気づかないと思う人もいると思います。確かになかなか気づきませんよね。勘のいい人なら不等式の証明は $(\quad)^2+(\quad)^2$ の形に

するんだからということから気づけるかもしれませんが、なかなか無理だと思います。

私も、受験生のときはこんな解法気づきませんでした。解答を見て覚えました。よく出てくるので、暗記して下さい。

$x^2+y^2+z^2 \geqq xy+yz+zx$ の証明

$$
\begin{aligned}
(\text{左辺})-(\text{右辺}) &= x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx \\
&= \frac{1}{2}(2x^2+2y^2+2z^2-2xy-2yz-2zx) \\
&= \frac{1}{2}\left\{(x^2-2xy+y^2)+(y^2-2yz+z^2)+(z^2-2zx+x^2)\right\} \\
&= \frac{1}{2}\left\{(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\right\} \geqq 0
\end{aligned}
$$

等号成立は $x-y=y-z=z-x=0$ つまり $x=y=z$ のとき

⇑上記の式変形は暗記してしまう！

これで、今回の解説は終わりです。問題集の解答なんかを見ても、サラッと答えが書いてあることが多く、「どうして、こんな解法が思いつけたの？」なんて感じること多いですよね。

でも、数学のできる人でもすぐに答えを思いつけたわけではありません。とにかく解けそうな解法をいろいろとやってみて、うまくいったものを解答として載せているにすぎません。「解ける可能性のある解法で、とにかく解いてみる」ということが受験問題を解く上でのポイントです。それでは、頑張ってください。

河見賢司

高校数学の勉強法
http://www.hmg-gen.com/

感想はこちらまでメールをください（何か言ってもらえると嬉しいです）
magdai@hmg-gen.com