質問内容

数列です。学校で $S_n - S_{n-1} = a_n$ っていう公式を勉強したんですけど、この公式はどうして成立するのですか？

こんにちは、河見賢司です。そうですね。なぜ成立するのか分かりにくいですよね。学校の授業で説明をしてくれたら簡単なんですが、なぜ成立するのか説明しない学校も多いです。

この $S_n - S_{n-1} = a_n$ は実は簡単に理解することができますよ。では、$S_n - S_{n-1} = a_n$ がなぜ成立するのか説明をしていきます。

S_n っていうのは、初項から第 n 項までの和です。ですから、S_n を実際に書き出してみると $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n$ となります。

次に S_{n-1} というのは、初項から第 $n-1$ 項までの和です。これも、書き出してみると $S_{n-1} = a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}$ となります。

S_n から S_{n-1} をひくと、以下のようになります。

$$\begin{array}{rl} S_n = & \cancel{a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}} + a_n \\ -)\ S_{n-1} = & \cancel{a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}} \\ \hline S_n - S_{n-1} = & a_n \end{array}$$

上記のようになるので、S_n から S_{n-1} をひくことによって、$S_n - S_{n-1} = a_n$ が成立するということを確認できると思います。

ただ、ここで注意しないといけないことがあります。$S_{\bigcirc}$ の ◯ の部分は自然数じゃないといけません。$n = 1$ のとき、S_{n-1} に $n = 1$ を代入すると $S_{1-1} = S_0$ となるので、$S_{\bigcirc}$ の ◯ の部分が 0 になってしまいます。

0 は自然数でないので、このときは成立しません。ですから、$S_n - S_{n-1} = a_n$ の公式が成立するには $n \geqq 2$ という条件が必要になります。

$S_n - S_{n-1} = a_n$ が成立するのは、$n \geqq 2$ のときだけです。ですから、$n = 1$ のときの値は別の方法で求める必要があります。これは意外に気づきにくいのですが、$S_1 = a_1$ で求めることができます。S_n は初項から第 n 項までの和だから、S_1 は言ってみれば初項から第 1 項までの和、つまり初項のことだよね？ですから、$S_1 = a_1$ です。

S_n と a_n の関係式

S_n と a_n には次のような関係式が成立する。

$$a_n = S_n - S_{n-1}\ (n \geqq 2), \quad a_1 = S_1$$

この公式はよく出てくるので覚えておいてください。S_n が出てきて a_n を問われたらまずこの公式を使うと思ってもらってかまいません。それでは、この公式を使って解くごくごく簡単な問題を解いてもらって今回の解説プリントは終わりにします。

問題

初項から第 n 項までの和 S_n が、$S_n = n^3 - n$ のとき、この数列の一般項 a_n を求めよ。

【解説】
これは、先ほどの公式 $S_n - S_{n-1} = a_n$ を使うだけです。ただ、この公式が成立するのは $n \geqq 2$ のときだけです。忘れやすいので注意して下さい。

【解答】
(i) $n = 1$ のとき $S_1 = a_1$ より、$a_1 = S_1 = 1^3 - 1 = 0$

(ii) $n \geqq 2$ のとき、$S_n - S_{n-1} = n^3 - n$ が成立する。

ここで、

$$\begin{aligned} S_{n-1} &= (n-1)^3 - (n-1) \\ &= n^3 - 3n^2 + 3n - 1 - n + 1 \\ &= n^3 - 3n^2 + 2n \end{aligned}$$

⇑ $S_n - S_{n-1} = a_n$ の計算を一度にしては面倒なので、まず S_{n-1} だけを計算をした

$S_n - S_n = a_n$

$n^3 - n - (n^3 - 3n^2 + 2n) = a_n$ ◀ $S_n = n^3 - 3n$ と $S_{n-1} = n^3 - 3n^2 + 2n$ をそれぞれ代入した

$3n^2 - 3n = a_n$

$\therefore\ a_n = 3n^2 - 3n$

$a_n = 3n^2 - 3n$ に $n = 1$ を代入すると $a_1 = 3 - 3 = 0$ となるので、$a_n = 3n^2 - 3n$ は $n = 1$ のときも成立する。(注) を見よ

以上より、$a_n = 3n^2 - 3n \ (n \geqq 1)$ ◀ これが答え

(注) $n \geqq 2$ のもとで求まった S_n だが、これは $n = 1$ のもとでも成立することが多い。

階差数列でも $n \geqq 2$ のもとで解いていくが階差数列の場合 $n = 1$ の時も１００パーセント成立します。ですから、階差数列の問題で $n = 1$ の時を確認してみて不成立なら、その答えは間違っています。

S_n は $n = 1$ のときも成立していることが多いが、成立していないこともあります。だから、確認してみてもし成立していなくても心配しなくていいです。教科書に載っているような簡単な問題なら成立することが多いですが、受験レベルになると成立しないことのほうが多いような気がします。

これで、今回の解説プリントは終わりです。簡単なところではありますが、意外に理解できていない人が多いように感じます。数列は苦手にてにしている人が多いですが、受験では頻出ですのでしっかりと理解しておいてください。

河見賢司

高校数学の勉強法
http://www.hmg-gen.com/

感想はこちらまでメールをください（何か言ってもらえると嬉しいです）
magdai@hmg-gen.com