

「ルールを覚えれば誰でもできる！あなたの数学の偏差値を70にするプリント」の詳細は以下をクリック！

<https://www.hmg-gen.com/tuusin.html>

「自宅に居ながら1対1の数学の授業が受けられます」の詳細は以下をクリック！

<https://www.hmg-gen.com/tuusin1.html>

質問内容

数列です。学校で $S_n - S_{n-1} = a_n$ っていう公式を勉強したんですけど、この公式はどうして成立するのですか？

こんにちは、河見賢司です。そうですね。なぜ成立するのか分かりにくいですよ。学校の授業で説明をしてくれたら簡単なんですけど、なぜ成立するのか説明しない学校も多いです。

この $S_n - S_{n-1} = a_n$ は実は簡単に理解することができますよ。では、 $S_n - S_{n-1} = a_n$ がなぜ成立するのか説明をしていきます。

S_n っていうのは、初項から第 n 項までの和です。ですから、 S_n を実際に書き出してみると $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + a_n$ となります。

次に S_{n-1} っていうのは、初項から第 $n-1$ 項までの和です。これも、書き出してみると $S_{n-1} = a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1}$ となります。

S_n から S_{n-1} をひくと、以下のようになります。

$$\begin{array}{r} S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + a_n \\ -) S_{n-1} = a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} \\ \hline S_n - S_{n-1} = a_n \end{array}$$

上記のようになるので、 S_n から S_{n-1} をひくことによって、 $S_n - S_{n-1} = a_n$ が成立するということを確認できると思います。

ただ、ここで注意しないといけないことがあります。 S_0 の 0 の部分は自然数じゃないといけません。 $n = 1$ のとき、 S_{n-1} に $n = 1$ を代入すると $S_{1-1} = S_0$ となるので、 S_0 の 0 の部分が 0 になってしまいます。

0 は自然数でないので、このときは成立しません。ですから、 $S_n - S_{n-1} = a_n$ の公式が成立するには $n \geq 2$ という条件が必要になります。

$S_n - S_{n-1} = a_n$ が成立するのは、 $n \geq 2$ のときだけです。ですから、 $n = 1$ のときの値は別の方法で求める必要があります。

これは意外に気づきにくいのですが、 $S_1 = a_1$ で求めることができます。 S_n は初項から第 n 項までの和だから、 S_1 は言ってみれば初項から第 1 項までの和、つまり初項のことだよな？ ですから、 $S_1 = a_1$ です。

S_n と a_n の関係式

S_n と a_n には次のような関係式が成立する。

$$a_n = S_n - S_{n-1} \quad (n \geq 2), \quad a_1 = S_1$$

この公式はよく出てくるので覚えておいてください。 S_n が出てきて a_n を問われたらまずこの公式を使うと思ってもらってかまいません。それでは、この公式を使って解くごくごく簡単な問題を解いてもらって今回の解説プリントは終わりにします。

問題

初項から第 n 項までの和 S_n が、 $S_n = n^3 - n$ のとき、この数列の一般項 a_n を求めよ。

【解答】

これは、先ほどの公式 $S_n - S_{n-1} = a_n$ を使うだけです。ただ、この公式が成立するのは $n \geq 2$ のときだけです。忘れやすいので注意して下さい。

(i) $n = 1$ のとき $S_1 = a_1$ より、 $a_1 = S_1 = 1^3 - 1 = 0$

(ii) $n \geq 2$ のとき、 $S_n - S_{n-1} = n^3 - n$ が成立する。

ここで、

$$\begin{aligned} S_{n-1} &= (n-1)^3 - (n-1) \\ &= n^3 - 3n^2 + 3n - 1 - n + 1 \\ &= n^3 - 3n^2 + 2n \end{aligned}$$

↑ $S_n - S_{n-1} = a_n$ の計算を一度にしては面倒なので、まず S_{n-1} だけを計算をした

$$S_n - S_{n-1} = a_n$$

$$n^3 - n - (n^3 - 3n^2 + 2n) = a_n \quad \leftarrow S_n = n^3 - 3n \text{ と } S_{n-1} = n^3 - 3n^2 + 2n \text{ をそれぞれ代入した}$$

$$3n^2 - 3n = a_n$$

$$\therefore a_n = 3n^2 - 3n$$

$a_n = 3n^2 - 3n$ に $n = 1$ を代入すると $a_1 = 3 - 3 = 0$ となるので、 $a_n = 3n^2 - 3n$ は $n = 1$ のときも成立する。(注)を見よ

以上より、 $a_n = 3n^2 - 3n$ ($n \geq 1$) ◀ **これが答え**

(注) $n \geq 2$ のもとで求めた S_n だが、これは $n = 1$ のもとでも成立することが多い。

階差数列でも $n \geq 2$ のもとで解いていくが階差数列の場合 $n = 1$ のときもほぼ 100 パーセント成立します (数学的にいって絶対成立するという訳ではないです。ただ、高校数学で出題された階差数列の問題で成立しない問題はほぼ出題されません)。ですから、階差数列の問題で $n = 1$ の時を確認してみて不成立なら、その答えは間違っています。

S_n は $n = 1$ のときも成立していることが多いが、成立していないこともあります。だから、確認してみてもし成立していなくても心配しなくていいです。教科書に載っているような簡単な問題なら成立することが多いですが、受験レベルになると成立しないことのほうが多いような気がします。

これで、今回の解説プリントは終わりです。簡単どころではありませんが、意外に理解できていない人が多いように感じます。数列は苦手にてにしている人が多いですが、受験では頻出ですのでしっかりと理解しておいてください。

数学って難しいですよ。でも、数学って「このときはこうする」というルールがあってそれをひとつずつ覚えていけば誰でもできるようになります。

「今までの苦労はなんだったの？」と思えるほど、簡単にできるようになりますよ。

「4浪しているのにセンター6割」

→ 「わずか入会8か月後に島根大学医学部医学科に合格！」

本人いわく「悲惨な成績」で限りなく学年で下位

→ 「ぐんぐん成績をあげて筑波大学理工学群現役合格！」

「問題が少し難しくなるととたんに解けなくなる」

→ 「解き方のルールを覚えて難問も解けるようになり東北大学歯学部合格！」

多くの受験生が数学の成績をあげた秘訣を紹介します。

以下の無料メルマガの登録をしてください。無料ですし、いつでも解除できるので登録しないと損ですよ。以下の枠をクリックしてください。

ルールが分かれば誰でもできる！
あなたの数学の偏差値を70にするメルマガ

ラインでも配信しています。ラインの方は以下よりお願いします。

ラインで登録する！

ツイッターやっています
<https://twitter.com/hmggen>

高校数学の勉強法
<https://www.hmg-gen.com/>

医学部数学の勉強法
<https://www.ouen-math.com/>

感想はこちらまでメールをください（何か言ってもらえると嬉しいです）
magdai@hmg-gen.com

河見賢司