質問内容

数列の問題で以下の問題をどう解いていいのか分かりません。教えてもらえますか？

$$\sum_{k=2}^{n} \log_2\left(1 + \frac{1}{k^2 - 1}\right)$$

こんにちは、河見賢司です。確かに難しい問題です。

シグマについてよく分からないという人は、次のページで勉強して下さい。

その１、公式を使って解くシグマの問題 http://www.hmg-gen.com/siguma1.pdf
その２、互いに打ち消し合うシグマの計算 http://www.hmg-gen.com/siguma2.pdf
その３、∑(等差)(等比) 型のシグマの計算 http://www.hmg-gen.com/siguma3.pdf

今回の問題は、上記で言うと「その２」の互いに打ち消し合うシグマの計算です。詳しくは、上記のプリントを見てほしいのですが、シグマの問題で公式が使えない場合、まず互いに打ち消し合う形になると思ってもらってかまいません。シグマの中身が分数、ルートを含んだ式、log を含んだ式、これらが出てきたときは互いに打ち消し合う形になるんだろうな、ということを解く前から意識できるようになっておいてください。このことを踏まえて、この問題に進みたいと思います。

【解説】

まず、$\sum_{k=2}^{n} \log_2\left(1 + \frac{1}{k^2 - 1}\right)$ を式変形しないといけないんだけど、このままだったら変形のしようがないよね？

今回は、シグマの互いに打ち消し合う形の問題だから、よく分かんないけどとりあえずシグマの中は○ − ○ というふうにマイナスの形になってくれないといけない。

で、log の場合、$\log_a \frac{A}{B} = \log_a A - \log_b B$ という公式があるから、log の中身が分数だったらマイナスの形を作ることができます。そこで、log の中身を分数表記してみることにします。

$$\sum_{k=2}^{n}\log_2\left(1+\frac{1}{k^2-1}\right)$$
$$=\sum_{k=2}^{n}\log_2\left(\frac{k^2}{k^2-1}\right)$$ ◀ $1+\dfrac{1}{k^2-1}$ を通分して計算した。
$$=\sum_{k=2}^{n}\left(\log_2 k^2-\log_2(k^2-1)\right)$$ ◀ $\log_a \dfrac{A}{B}=\log_a A-\log_b B$ の公式より

とりあえず、ここまできました。$\sum_{k=2}^{n}\left(\log_2 k^2-\log_2(k^2-1)\right)$ というふうに、シグマの中身が○－○という形で表されたので、この状態で互いに打ち消し合うタイプかな？と考えます。

互いに打ち消し合うとは、次のような状態になったときです。

例えば $\sum_{k=1}^{n}(a_k-a_{k+1})$ のような形です。

$\sum_{k=1}^{n}(a_k-a_{k+1})$ について

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k-a_{k+1})$$
$$=\sum_{k=1}^{n}a_k-\sum_{k=1}^{n}a_{k+1}$$
$$=(a_1+\cancel{a_2+a_3+\cdots+a_n})$$ ◀ $\sum_{k=1}^{n}a_k$ の中身を実際に書き出した
$$-(\cancel{a_2+a_3+\cdots+a_n}+a_{n+1})$$ ◀ $\sum_{k=1}^{n}a_{k+1}$ の中身を実際に書き出した
$$=a_1-a_{n+1}$$ ◀ 同じ部分は互いに打ち消しあってくれて残ったものが解となる

今回は、ひとつずれたパターンを紹介しましたが別に $\sum_{k=1}^{n}(a_k-a_{k+1})$ とひとつずれたときだけでなく、$\sum_{k=1}^{n}(a_k-a_{k+2})$ のように２つずれたり、あるいはそれ以上ずれている場合でも別にＯＫです。

で、このことを頭にいれて $\sum_{k=2}^{n}\left(\log_2 k^2-\log_2(k^2-1)\right)$ を見てみると、どのように式変形をしてもうまくいきません (互いに打ち消し合う形になってくれない)。

ということで、別の方法はないかな？と考えます。$\log_2 k^2=2\log_2 k$ と式変形できるし、$\log_2(k^2-1)=\log_2(k-1)(k+1)=\log_2(k-1)+\log_2(k+1)$ と式変形をすることが思いつき

ます。

どうして、$\log_2 k^2 = 2\log_2 k$ と $\log_2(k^2-1) = \log_2(k-1)+\log_2(k+1)$ の両方とも式変形したの？と思うかもしれませんが、**互いに打ち消し合う形になってくれるためには、次数が両方とも同じ**である必要があります。$\log_2 k^2 = 2\log_2 k$ と式変形をしました。このとき log の中身の k の次数は当然 1 です。ということは、もうひとつの $\log_2(k^2-1)$ も次数が 1 である必要があります。そこで、もう一方の $\log_2(k^2-1)$ も、$\log_2(k^2-1) = \log_2(k-1)+\log_2(k+1)$ と変形をして次数を 1 にしました。

ここまでで次のように式変形されました。

$\sum_{k=2}^{n}(2\log_2 k - \log_2(k-1) - \log_2(k+1))$ で、ここからまた考えないといけないんだけど、これはどのように式変形をするかと言えば、$2\log_2 k = \log_2 k + \log_2 k$ と式変形をします。

この式変形はなかなか思いつかないとは思いますが、先ほど互いに打ち消し合うには次数が同じ必要があるといいましたが、**互いに打ち消し合うためには、さらに係数が同じ必要があります**(← 係数が等しくなかったら当然打ち消し合うことはないよね？) ですから、係数をすべて 1 にするために、$2\log_2 k = \log_2 k + \log_2 k$ と変形をして強引にすべての係数を 1 にしました。

$$\sum_{k=2}^{n}(2\log_2 k - \log_2(k-1) - \log_2(k+1))$$

$$=\sum_{k=2}^{n}(\log_2 k + \log_2 k - \log_2(k-1) - \log_2(k+1)) \quad ◀\ 2\log_2 k = \log_2 k + \log_2 k \text{ より}$$

$$=\sum_{k=2}^{n}\left\{(\log_2 k - \log_2(k-1)) + (\log_2 k - \log_2(k+1))\right\}$$

ここまできたら、互いに打ち消し合う形になったので計算できるよね？それでは、解答に進みます。

【解答】

$$\sum_{k=2}^{n}\log_2\left(1+\frac{1}{k^2-1}\right)$$

$$=\sum_{k=2}^{n}\log_2\left(\frac{k^2}{k^2-1}\right) \quad ◀\ 1+\frac{1}{k^2-1} \text{ を通分して計算した。}$$

$$=\sum_{k=2}^{n}\left(\log_2 k^2 - \log_2(k^2-1)\right) \quad ◀\ \log_a\frac{A}{B} = \log_a A - \log_b B \text{ の公式より}$$

$$=\sum_{k=2}^{n}(2\log_2 k-\log_2(k-1)-\log_2(k+1))$$

$$=\sum_{k=2}^{n}(\log_2 k+\log_2 k-\log_2(k-1)-\log_2(k+1))$$ ◀ $2\log_2 k=\log_2 k+\log_2 k$ より

$$=\sum_{k=2}^{n}\left\{(\log_2 k-\log_2(k-1))+(\log_2 k-\log_2(k+1))\right\}$$

$$=\sum_{k=2}^{n}\left\{\log_2 k-\log_2(k-1)\right\}+\sum_{k=2}^{n}\left\{\log_2 k-\log_2(k+1)\right\}$$

ここで、

$$\sum_{k=2}^{n}\left\{\log_2 k-\log_2(k-1)\right\}$$

$$=(\cancel{\log_2 2+\cdots+\log_2(n-1)})+\log_2 n$$ ◀ $\sum_{k=2}^{n}\log_2 k$ を書き出した

$$-(\log_2 1+\cancel{\log_2 2+\cdots+\log_2(n-1)})$$ ◀ $\sum_{k=2}^{n}\log_2(k-1)$ を書き出した

$$=\log_2 n-\log_2 1$$

$$=\log_2 n$$ ◀ $\log_2 1=0$ より

$$\sum_{k=2}^{n}\left\{\log_2 k-\log_2(k+1)\right\}$$

$$=(\log_2 2+\cancel{\log_2 3+\cdots+\log_2 n})$$ ◀ $\sum_{k=2}^{n}\log_2 k$ を書き出した

$$-(\cancel{\log_2 3+\cdots+\log 2n}+\log_2(n+1))$$ ◀ $\sum_{k=2}^{n}\log_2(k+1)$ を書き出した

$$=\log_2 2-\log_2(n+1)$$

$$=1-\log_2(n+1)$$ ◀ $\log_2 2=1$ より

よって、

$$\sum_{k=2}^{n}\left\{\log_2 k-\log_2(k-1)\right\}+\sum_{k=2}^{n}\left\{\log_2 k-\log_2(k+1)\right\}$$

$$=\log_2 n+1-\log_2(n+1)$$

$$=1+\log_2\left(\frac{n}{n+1}\right)$$ ◀ これが答え

今回の問題はどうだったでしょうか？これなんですが、指導している生徒に解いてもらっていて途中までは分かるけど途中からの式変形が思いつかなかったので、紹介させてもらいました。やや独特な考え方で、なかなか思いつきにくいかもしれませんが、「互いに

打ち消し合うには同じような形にする必要がある」と考えると自然とできるようになります。

それでは、がんばって勉強して下さい。

河見賢司

高校数学の勉強法
http://www.hmg-gen.com/

感想はこちらまでメールをください（何か言ってもらえると嬉しいです）
magdai@hmg-gen.com