質問内容

等差数列 a_n が $a_2 = 2, a_5 = 5$ を満たしている。また、等比数列 b_n があり a_1, b_2, a_3, b_4 という順で等比数列をなしている。ただし、この数列の公比は正であるものとする。

このとき b_2^2 と $b_2 \cdot b_4$ を求めよ。また、b_n を n を用いて表せ。

上記のように数列が２つ出てくるようなタイプの問題がわかりません。どう解けばいいですか？

回答

こんにちは、河見賢司です。センター試験で多く出題されるような問題なんですけど、確かに少しややこしいですね。

センター試験の問題はそれほど難しくないですが、問題を見た時に瞬間的にどの公式を使うか、どういった方針で解いていくかということを判断できるようになっておかないといけません。まずは、教科書や簡単な問題集で繰り返し勉強して、基本的な解法を徹底して覚えることが重要です。そういった作業をしてから、こういった少しややこしい問題を解くようにしたらいいと思います。

と言っても、それほど難しい問題でないので丁寧に考えていったら分かると思いますよ。それでは、問題の解説に進みたいと思います。

【解説】
まあ、よく分かんないけどまず a_n を求めてみようかな？

「なぜ、a_n を求めるの?」と思ったかもしれませんが、a_1, b_2, a_3, b_4 という順で等比数列といった条件を求めるには a_1 と a_3 の値が必要です。

a_1 と a_3 の値を求めるには、a_n があれば求めることができます。また、a_n は初項と公差が分かれば表すことができますが、$a_2 = 2, a_5 = 5$ という条件が問題文に与えられているので、これらの条件を使えば、公差と初項を求めることができるからです。

数学の問題の考え方として、**与えられた条件は１００パーセント使い切る**といった鉄則があります。数学は、問題で与えられている条件を使って解いていくということは知っていると思いますが、余分ないらない条件が与えられていることはまずありません。ですから、**与えられて条件は１００パーセント使い切る**ということを頭にいれておいてください。

そこで、与えられた条件はすべて使い切らないとダメなんだから、$a_2 = 2, a_5 = 5$ という条件を使うにはどうしたらいいんだろう？と考えます。そうすると、「あっ、このふたつの条件の条件を使えば a_n が求められる ··· 」と気づくことができます。

じゃあ、まずこれらの式を使って a_n を求めていきたいと思います。知っていると思いますが、一応等差数列の公式をまとめておきます。

等差数列の公式

等差数列で初項を a、公差を d、末項を l とする。そのとき、一般項 a_n と第 n 項までの和 S_n は次のようになる。

$$a_n = a + (n-1)d$$

$$S_n = \frac{n}{2}(a+l) = \frac{n}{2}\left\{2a + (n-1)d\right\}$$

⇑(注) 簡単ではありますが、上記の S_n の公式がなぜ成立するのか説明しておきたいと思います。

$1+2+3+4+5+6+7+8+9+10$ を計算をしてみて、というと 1 から順に足し合わせていくという人も多いと思います。ですが、工夫したら、少し簡単になります。どういうふうに計算をするかというと、まずは一番小さい数と一番大きい数を足しあわせます。

そうすると $1+10 = 11$ となります。次に、2 番目に小さい数と 2 番目に大きい数とを足し合わせます。そうすると、$2+9 = 11$ となります。次に 3 番目ずつ $3+8 = 11$ これでもう分かったと思うけど、どのペアをとっても和は 11 ってなるよね。そして、ペアの数は何個あるかと言えば 10 を 2 で割った 5 になります。

上記を計算式でかくと $\frac{10}{2}(1+10)$ となります。これでもう分かったかもしれないけど、$1+2+3+4+5+6+7+8+9+10$ も等差数列の和だよね (初項が 1、公差が 1)。
$\frac{10}{2}(1+10)$って $\frac{(項数)}{2}((初項)+(末項))$ってなっているよね？

だから、等差数列の和の公式は $S_n = \frac{n}{2}(a+l)$ってなります。それから、和のもうひとつの公式 $S_n = \frac{n}{2}\left\{2a+(n-1)d\right\}$ の方だけど、末項を l で表したけど、第 n 項までの和って、$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ なんだよね。ということは、末項は a_n ってことになるよね？だから、$l = a_n$ となります。

さっき、確認をした $S_n = \frac{n}{2}(a+l)$ に $l = a_n = a + (n-1)d$ を代入してみると、

$$S_n = \frac{n}{2}(a+l)$$

$$= \frac{n}{2}\left\{a + a + (n-1)d\right\}$$ ◀ $S_n = a + (n-1)d$ を代入した

$$= \frac{n}{2}\left\{2a + (n-1)d\right\}$$ ◀ S_n の公式が導けた！

一応、上記のようになるので公式が成立しているということを確認できると思います。ただ、いちいち導いていたら時間がないので、公式は暗記するようにしておいてください。それでは、問題に戻ります。

$a_2 = 5$ という条件と $a_5 = 14$ っていう問題文に与えられた条件を使って a_n を求めていくんだよね？こういうふうに等差数列でも等比数列でも、どの a_n でもいいから、ふたつの値さえ与えられていたら初項と公差 (公比) を求めることができます。センターではよくでてくるので、解き方を覚えておいてください。ただ単に連立方程式を解くだけですよ。

$a_2 = 5$ より、

$a_2 = a_1 + (2-1)d = 5$ ◀ 等差数列の公式 $a_n = a + (n-1)d$ に $n = 2$ を代入した。

$$a_1 + d = 5 \cdots ①$$

$a_5 = 14$ より

$a_5 = a_1 + (5-1)d = 14$ ◀ 等差数列の公式 $a_n = a + (n-1)d$ に $n = 5$ を代入した。

$$a_1 + 4d = 14 \cdots ②$$

①, ② を連立すると $a_1 = 2,\ d = 3$ となる。

よって、

$a_n = 2 + (n-1)3$ ◀ 等差数列の公式 $a_n = a + (n-1)d$ に $a = 2,\ d = 3$ を代入した

$= 3n - 1$ ◀ a_n が求まった

ここまでで、a_n を求めることができました。a_1, b_2, a_3, b_4 が等比数列という条件を使うのに必要なのは a_1 と a_3 なので、$a_1 = 2$ は求められているからいいとして、a_3 の値も求めておきたいと思います。

$a_3 = 2 + (3-1)3 = 8$ となります。

ここまできたら、次の等比数列の性質を使って解くだけです。これも簡単に導けますが、よく出てくるので結果そのものを覚えておいた方がいいと思います。

3 数が等比数列のとき

a, b, c がこの順で等比数列のとき、

$$b^2 = ac$$

を満たす。

⇑ 上記も簡単に導くことができますよ。

まず、等比数列なので a, b, c で、ひとつ小さな a に公比 r をかけたら b になります。よって、$ar = b$ という関係式ができます。

同様に、$br = c$ となります。

$ar = b$ と $br = c$ の、この二つの式から r を消去すると $b^2 = ac$ が導けます。多分分かると思うけど、一応導いておきます。

$ar = b$ より、$r = \dfrac{b}{a}$ これを $br = c$ に代入すると

$$b \cdot \frac{b}{a} = c$$

$b^2 = ac$ ◀ 両辺に a をかけた。これで公式が導けた！

上記のようにすれば簡単に導けますが、いちいち導くのは面倒なので、覚えておいてください。また、この問題では使いませんが、先ほど等差数列をまとめておきましたので、次に等比数列もまとめておきたいと思います。

等比数列

等比数列で初項を a、公比を r とする。そのときの一般項を a_n と第 n 項までの和 S_n は次のようになる。

$$a_n = a\,r^{n-1}$$

$$S_n = \begin{cases} \dfrac{a\,(r^n - 1)}{r - 1} = \dfrac{a\,(1 - r^n)}{1 - r} & (r \neq 1 \text{ のとき}) \\ a\,n & (r = 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

⇑これも暗記しないといけないですが、S_n の公式は導き方が独特なので、とりあえず自分でも導けるようになっておいてください。

等比数列の公式 S_n はどのように導くかというと、S_n から S_n に公比 r をかけたものを引きます。どうして、そうするの？と思うかもしれませんが「そうするとうまくいくから」としか答えようがありません。

今回に限らず数学ってそういったものが多いです。こういったものは、もう解き方を暗記するしかありません。たまに、納得できない人もいるんですけど、割り切って進めるようにしておいてください。それでは、S_n を導いていきます。

$$
\begin{array}{rl}
S_n = & a_1 + \cancel{a_1 r + a_1 r^2 + \cdots + a_1 r^{n-1}} \\
-)\quad r\,S_n = & \qquad\; \cancel{a_1 r + a_1 r^2 + \cdots + a_1 r^{n-1}} + a_1 r^n \\ \hline
(1-r)\,S_n = & a_1 - a_1 r^n \\
(1-r)\,S_n = & a_1(1 - r^n)
\end{array}
$$

ここから S_n について解きたいんだけど、何も考えずに両辺を $1-r$ で割ったら、ダメだよ。両辺を文字で割るときは必ず、その文字が 0 になるかどうか確認しないとダメだったんだよね。そして、0 になる可能性があるなら場合分けして考えていきます。重要なので、もう一度言っておきます。

等式の両辺を文字で割る時の注意点

等式の両辺を文字で割るときは、その文字が 0 になる可能性があるかどうか必ず確認する。0 になる可能性がある時は、0 の場合とそれ以外の場合で場合分けして解いていく。

このことを踏まえて、$(1-r)\,S_n = a_1(a - r^n)$ は $1 - r = 0$ つまり $r = 1$ のときとそれ以外 $r \neq 1$ のときで場合訳が必要です。

(i) $r \neq 1$ のとき

$(1-r)S_n = a_1(1-r^n)$

$$S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r} \quad \blacktriangleleft\ 1-r \fallingdotseq 0 \text{ より、両辺を } 1-r \text{ で割った}$$

$$= \frac{a_1(r^n-1)}{r-1} \quad \blacktriangleleft\ \text{分母分子に } -1 \text{ をかけた}$$

(ii) $r=1$ のとき

$S_n = a_1 + a_1 + \cdots + a_1$ ◀ $r=1$ のときの S_n をすべて書き出した。a_1 を n 回足し合わせる

$= n\,a_1$

これで、公式が導けました。初項を a ではなく a_1 と表記しましたけど同じものと思ってください。

先ほど、3 数が等比数列のとき $b^2 = ac$ ということを説明しましたが、3 数が等差数列というのも出てくるので、暗記しておいてください。

3 数が等差数列のとき

a, b, c がこの順で等差数列のとき、

$$2b = a + c$$

を満たす。

⇑ 上記も簡単に導くことができますよ。

等差数列なので a, b, c で、ひとつ小さな a に公差 d を加えたら b になります。よって、$a+d=b$ という関係式ができます。同様に、ひとつ小さな b に公差 d を加えたら c になります。よって、$b+d=c$ という関係式が導けます。このふたつの式から、d を消去したら $2b=a+c$ という関係式が導けます。

簡単に導けると思うので自分で確認をしておいてください。それでは、問題に戻りたいと思います。

問題は、a_1, b_2, a_3, b_4 は等比数列と言っています。また、$a_1=2, a_3=8$ という条件が与えられているので、これらを代入すると、$a_1, b_2, a_3, b_4 = 2, b_2, 8, b_3$ となります。ここからは、先ほど説明をした 3 数が a, b, c が等比数列のとき、$b^2 = ac$ が成立するという性質を使って解いていくだけです。

$2, b_2, 8, b_4$ がこの順で等比数列なんですが、まずは前半の3つの数 $2, b_2, 8$ を使って解いていきます。この3数はこの順で等比数列なので、
$b_2^2 = 2 \cdot 8$ ◀ $b^2 = ac$ より、$b = b_2, a = 2, c = 8$ を代入した $= 16$ が成立します。これで、まず b_2^2 の値を求めることができました。

次に、$b_2 \cdot b_4$ の値を求めます。これも、先ほどと同じように3数が等比数列となるには $b^2 = ac$ である、といった性質を使っていくだけです。

$b_2, 8, b_4$ はこの順で等比数列なので、
$8^2 = b_2 \cdot b_4$ ◀ $b^2 = ac$ より、$b = 8, a = b_2, c = b_4$ を代入した

よって、$b_2 \cdot b_4 = 64$

ここまでで、b_2^2 と $b_2 \cdot b_4$ の値が求まりました。最後に b_n の値を求めるだけです。

また、少し数学の説明です。今回の問題だったらそれほど注意しなくても大丈夫かもしれませんが、**数学は、前半の結果を使って後半の問題を解いていくことが多い**ということを頭にいれておいてください。

問題が (1), (2) というふうになっていたら (2) を解くのに (1) を使って解いていくことが多いです。「当たり前だよ」と思うかもしれませんが、これ何度言ってもホントに忘れてしまう人が多いんです。特にセンター試験では、問題の流れにそっていけば必ず解けるようになっています。問題を解くとき、分からなくなったときは「流れに乗るんだ」とか「前問の結果を使えるんだ」ということを頭に叩き込んでください。

(注)「前問の結果を使う」と言いましたが、これは１００パーセントと言うわけではありません。あくまで可能性が高いということです。使わない時もあります。

数学って、「問題をみたら答えまでの道のりがすべてわかる」と思っている人もいますが、決してそうではありません。よく分からなくてもとりあえずうまくいく可能性のあるものをすべてやっていっているだけです。

例えばAという解法で解いてみてうまくいけばＯＫですし、ダメだったらその時点でまた次の解法を考えます。

要するに解ける可能性の高い (と自分が思える) 解法から次々とやっているだけです。ですから、必ずしも前半の結果を使って解くとは限りませんが、前半の結果を使って解い

たらうまくいくかも？と思えるようにしておいてください。

$b_2^2 = 16$ より $b_2 = \pm 4$ となりますが、$b_2 = -4$ は不適です。なぜなら、公比は正で $2, b_2, 8, b_4$ の順で等比数列をなすのだから $b_2 = -4$ のときは公比がマイナスになるので不適です。

$b_2 = 4$ ということが分かりました。このことと先ほど求めた $b_2 \cdot b_4 = 64$ より $b_4 = 16$ となることが分かります。

$b_2 = 4$ と $b_4 = 16$ ということが分かったので、ここからは簡単に b_n を求めることができます。b_n の公比を r とすると、$b_2 = 4$ より、$b_2 = b_1 r = 4 \cdots$ ① と $b_4 = 16$ より、$b_4 = b_1 r^3 = 16$ となります。

① と ② を連立すると $b_1 = 2, r = 2$ となります。

$b_n = 2 \cdot 2^{n-1}$ ◀ 等比数列の公式 $b_n = b_1 r^{n-1}$ に $b_1 = 2, r = 2$ をそれぞれ代入した

$= 2^n$ ◀ 指数法則 $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ より、これが答え

ながながと、説明をしましたがこれで答えにたどりつきました。お疲れ様です。それでは、一応解答を書いておきます。

【解答】

a_n は等差数列なので、公差を d とする。$a_2 = 5$ より、

$a_2 = a_1 + (2-1)d = 5$ ◀ 等差数列の公式 $a_n = a + (n-1)\,d$ に $n = 2$ を代入した。

$$a_1 + d = 5 \cdots ①$$

$a_5 = 14$ より

$a_5 = a_1 + (5-1)d = 14$ ◀ 等差数列の公式 $a_n = a + (n-1)\,d$ に $n = 2$ を代入した。

$$a_1 + 4d = 14 \cdots ②$$

①, ② を連立すると $a_1 = 2, d = 3$ となる。

よって、$a_n = 3n - 1$ となるので、$a_1 = 2, a_3 = 8$ が言える。

a_1, b_2, a_3, b_4 がこの順で等比数列と言える。$a_1 = 2, a_3 = 8$ を考え

$b_2^2 = 2 \cdot 8 = 16$

$b_2 \cdot b_4 = 8^2 = 64$

$b_2^2 = 16$ より $b_2 = \pm 4$ ところが公比が正であることと a_1, b_2, a_3, b_4 がこの順で等比数列で $a_1 = 2 > 0$ ということを考え、$b_2 = -4$ は不適。

$b_2 = 4, b_4 = 16$ より、$b_n = 2^n$

以上より、$b_2^2 = 16, b_2 \cdot b_4 = 64, b_n = 2^n$ となる。

今回の問題は覚えることが多く大変だったと思います。ですが、解答を見てもらえば分かるようにやっていることは、すべて教科書に載っているようなごくごく簡単な内容です。どの問題で、どの知識を使うかが重要になります。

これはもう、問題数をこなすしかないんです。それでは、がんばってください。

河見賢司

高校数学の勉強法
http://www.hmg-gen.com/

感想はこちらまでメールをください（何か言ってもらえると嬉しいです）
magdai@hmg-gen.com