「ルールを覚えれば誰でもできる！あなたの数学の偏差値を７０にするプリント」の詳細は以下をクリック！
http://www.hmg-gen.com/tuusin.html

「自宅に居ながら１対１の数学の授業が受けられます」の詳細は以下をクリック！
http://www.hmg-gen.com/tuusin1.html

教えている生徒さんからの質問です。

質問内容

以下の過去問を解いていてとりあえずは解けたんですが、解答を見たらもっと簡単に解けているみたいなんですけど、何を言っているかまったく分かりません。どうやって解いたのですか？

生徒さんの言っていた問題は次のようなものです。説明を簡単にするためにオリジナルの問題を作りました。

【問題】

三角形 ABC の外心を O とし、$\left|\overrightarrow{AB}\right| = 1,\ \left|\overrightarrow{BC}\right| = \sqrt{3},\ \left|\overrightarrow{AC}\right| = 2$ とする。

このとき、$\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{AB}$ を求めよ。

回答

生徒は $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AO}$ を求めるために、とりあえず $\overrightarrow{AO}$ を求めて、そこから $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AO}$ を求めたそうです。

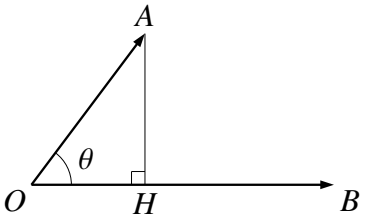
この解法でも解けますが、少しというかかなり面倒くさいです。内積の図形的な性質を理解していればこの問題はほんの一瞬で解けてしまうんです。

この性質は、実際の大学受験でもたまに出題されますが知らない人が意外に多いです。簡単な内容なのでしっかりと理解しておいてください。特に難関大学を目指す人にとってこの考え方は必須です。

まずは、内積の説明からです。

内積の定義が$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|\cos\theta$っていうことは知っていると思います。では、内積の図形的な性質を見ていきます。

θが鋭角、つまり$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$のときを考えます。



上記のようにAからBに垂線を下ろし、OBとの交点をHとします。

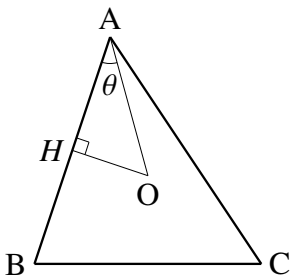
$\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|\cos\theta=\left|\overrightarrow{\mathrm{OH}}\right|$ってなるよね。

このことから$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|\cos\theta=\left|\overrightarrow{\mathrm{OH}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|$ ってなります。

ベクトルの図形的性質っていったけど、ごくごく簡単なものです。頂点Aから垂線をおろしOHの長さが分かるときこの性質を使うことが多いです。

この性質を使う一番有名な問題が今回解説する外心に関する問題です。

「外心の定義は、垂直2等分線の交点である」という性質を使って解いていきます。



O が三角形 ABC の外心のとき、上図のようになりますが O から AB に下ろした垂線を H とすると、H は AB の中点となります (←分かるよね？外心 O は垂直 2 等分線の交点なんだから、当然 H は AB の中点)。

このことより、
$\overrightarrow{\mathrm{AO}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AB}} = \left|\overrightarrow{\mathrm{AO}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right| \cos\theta = \left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{AH}}\right| = (AB$ の長さ$) \times (AB$ の長さの半分$)$ が成立します。

今回の問題は、この性質さえ知っていれば一瞬だよね。

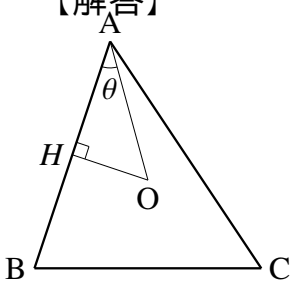
もう一度問題を書いておきます。

問題

三角形 ABC の外心を O とし、$\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right| = 1,\ \left|\overrightarrow{\mathrm{BC}}\right| = \sqrt{3},\ \left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right| = 2$ とする。

このとき、$\overrightarrow{\mathrm{AO}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AB}}$ を求めよ。

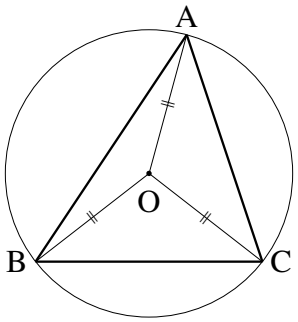
【解答】



O から AB に垂線をおろしその交点を H とする。O は外心なので H は AB の中点となる。

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{AO}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AB}} &= \left|\overrightarrow{\mathrm{AO}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right| \cos\theta \\
&= \left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right| \times \left|\overrightarrow{\mathrm{AO}}\right| \cos\theta \\
&= \left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right| \times \left|\overrightarrow{\mathrm{AH}}\right| \\
&= 1 \times \frac{1}{2} \\
&= \boldsymbol{\frac{1}{2}}
\end{aligned}
$$

ちなみち、$\overrightarrow{OP}$ をまず求めてから解いていく解法も別解として紹介したいと思います。外心の問題は、垂直 2 等分線の交点であるという性質を使うこともありますが、外心は外接円の中心だから $\left|\overrightarrow{OA}\right| = \left|\overrightarrow{OB}\right| = \left|\overrightarrow{OC}\right|$ という性質を使うことの方が多いです。



【別解】

$\overrightarrow{AO} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$ とする。

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OB} &= \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AO} \\ &= \overrightarrow{AB} - (x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}) \\ &= (1-x)\overrightarrow{AB} - y\overrightarrow{AC}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OC} &= \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AO} \\ &= \overrightarrow{AC} - (x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}) \\ &= -x\overrightarrow{AB} + (1-y)\overrightarrow{AC}\end{aligned}$$

ここで余弦定理より $\cos\angle CAB = \dfrac{1+4-3}{2\cdot 2} = \dfrac{1}{4}$ よって

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 1\cdot 2\cdot\dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{2}$ ◀ 内積が必要になるのでとりあえず求めておいた

ここで O は外心なので $\left|\overrightarrow{OA}\right| = \left|\overrightarrow{OB}\right| = \left|\overrightarrow{OC}\right|$ ◀ 外心の重要な性質より がいえる。

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|^2 = \left|-\overrightarrow{\mathrm{AO}}\right|^2$$
$$= \left|x\overrightarrow{\mathrm{OA}} + y\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|^2$$
$$= x^2\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|^2 + 2xy\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}} + y^2\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|^2$$
$$= x^2 + xy + 4y^2$$

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|^2 = \left|(1-x)\overrightarrow{\mathrm{AB}} - y\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|$$
$$= (x-1)^2\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|^2 - 2(1-x)y\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}} + y^2\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|^2$$
$$= (x-1)^2 - 2(1-x)y\cdot\frac{1}{2} + y^2\cdot 4$$
$$= x^2 - 2x + 1 - y + xy + 4y^2$$

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right|^2 = \left|-x\overrightarrow{\mathrm{AB}} + (1-y)\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|^2$$
$$= x^2\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|^2 - 2x(1-y)\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}} + (y-1)\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|^2$$
$$= x^2 - 2x(1-y)\cdot\frac{1}{2} + (y-1)^2\cdot 4$$
$$= x^2 - x + xy + 4y^2 - 8y + 4$$

$\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|^2 = \left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|^2$ より

$x^2 + xy + 4y^2 = x^2 - 2x + 1 - y + xy + 4y^2$

$y = 2x - 1 \cdots$ ①

$\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|^2 = \left|\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right|^2$ より

$x^2 + xy + 4y^2 = x^2 - x + xy + 4y^2 - 8y + 4$

$x = -8y + 4 \cdots$ ②

② を ① に代入して

$$
\begin{aligned}
y &= -2(-8y+4)+1 \\
y &= 16y-8+1 \\
-15y &= -7 \\
y &= \frac{7}{15} \\
x &= -8\cdot\frac{7}{15}+4 \\
&= \frac{4}{15}
\end{aligned}
$$

$$\therefore\ \overrightarrow{AO} = \frac{4}{15}\overrightarrow{AB} + \frac{7}{15}\overrightarrow{AB}$$

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AB} &= \left(\frac{4}{15}\overrightarrow{AB} + \frac{7}{15}\overrightarrow{AC}\right)\cdot\overrightarrow{AB} \\
&= \frac{4}{15}\left|\overrightarrow{AB}\right|^2 + \frac{7}{15}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} \\
&= \frac{4}{15}\cdot 1 + \frac{7}{15}\cdot\frac{1}{2} \\
&= \frac{4}{15} + \frac{7}{30} \\
&= \boldsymbol{\frac{1}{2}}
\end{aligned}
$$

このようにすれば $\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AB}$ も求めることができます。ただ見てもらえばわかるようにかなり面倒です。内積の図形的な性質と言えばなんとなく難しそうですが、今回説明したようになんてことない内容です。難関大学志望者はしっかりと覚えておいてください。

数学って難しいですよね。でも、数学って「このときはこうする」というルールがあってそれをひとつずつ覚えていけば誰でもできるようになります。

「今までの苦労はなんだったの？」と思えるほど、簡単にできるようになりますよ。

「４浪しているのにセンター６割」→「入会８か月後に島根大学医学部医学科に合格！」

本人いわく「悲惨な成績」で限りなく学年で下位→「ぐんぐん成績をあげて筑波大学理

工学群現役合格！」

「問題が少し難しくなるととたんに解けなくなる」→「解き方のルールを覚えて難問も解けるようになり東北大学歯学部に合格！」

多くの受験生が数学の成績をあげた秘訣を紹介します。

以下の無料メルマガの登録をしてください。無料ですし、いつでも解除できるので登録しないと損ですよ。以下の枠をクリックしてください。

ルールが分かれば誰でもできる！
あなたの数学の偏差値を７０にするメルマガ

ラインでも配信しています。ラインの方は以下よりお願いします。

ラインで登録する！

ツイッターやっています。
https://twitter.com/hmggen

高校数学の勉強法
http://www.hmg-gen.com/

医学部数学の勉強法
https://www.ouen-math.com/

感想はこちらまでメールをください（何か言ってもらえると嬉しいです）
magdai@hmg-gen.com

河見賢司