教えている生徒からの質問です。

質問内容

以下の過去問を解いていてとりあえずは解けたんですが、解答を見たらもっと簡単に解けているみたいなんですけど、何を言っているかまったく分かりません。どうやって解いたのですか？

生徒の言っていた問題は次のようなものです。説明を簡単にするためにオリジナルの問題を作りました。

【問題】

三角形 ABC の外心を O とし、$\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right| = 1,\ \left|\overrightarrow{\mathrm{BC}}\right| = \sqrt{3},\ \left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right| = 2$ とする。

このとき、$\overrightarrow{\mathrm{AO}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AB}}$ を求めよ。

回答

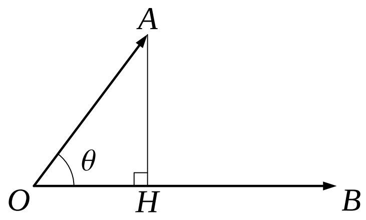
生徒は $\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AO}}$ を求めるために、とりあえず $\overrightarrow{\mathrm{AO}}$ を求めて、そこから $\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AO}}$ を求めたそうです。

この解法でも解けますが、少しというかかなり面倒くさいです。内積の図形的な性質を理解していればこの問題はほんの一瞬で解けてしまうんです。

この性質は、実際の大学受験でもたまに出題されますが知らない人が意外に多いです。簡単な内容なのでしっかりと理解しておいてください。特に難関大学を目指す人にとってこの考え方は必須です。

まずは、内積の説明からです。

内積の定義が $\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}} = \left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right| \cos\theta$ っていうことは知っていると思います。では、内積の図形的な性質を見ていきます。



上記のようにAからBに垂線を下ろし、OBとの交点をHとします。

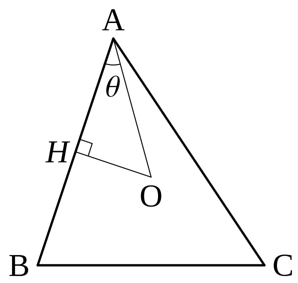
$\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|\cos\theta=\left|\overrightarrow{\mathrm{OH}}\right|$ってなるよね。

このことから$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|\cos\theta=\left|\overrightarrow{\mathrm{OH}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|$ってなります。

ベクトルの図形的性質っていったけど、ごくごく簡単なものです。頂点Aから垂線をおろしOHの長さが分かるときこの性質を使うことが多いです。

この性質を使う一番有名な問題が今回解説する外心に関する問題です。

「外心の定義は、垂直2等分線の交点である」という性質を使って解いていきます。



Oが三角形ABCの外心のとき、上図のようになりますがOからABに下ろした垂線をHとすると、HはABの中点となります(←分かるよね？外心Oは垂直2等分線の交点なんだから、当然HはABの中点)。

このことより、
$\overrightarrow{\mathrm{AO}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\left|\overrightarrow{\mathrm{AO}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|\cos\theta=\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{AH}}\right|=(AB$の長さ$)\times(AB$の長さの半分$)$が成立します。

今回の問題は、この性質さえ知っていれば一瞬だよね。

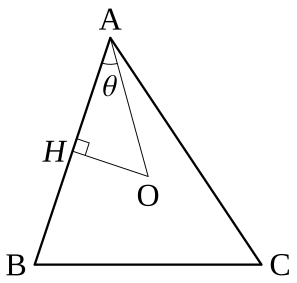
もう一度問題を書いておきます。

問題

三角形 ABC の外心を O とし、$\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right| = 1,\ \left|\overrightarrow{\mathrm{BC}}\right| = \sqrt{3},\ \left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right| = 2$ とする。

このとき、$\overrightarrow{\mathrm{AO}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AB}}$ を求めよ。

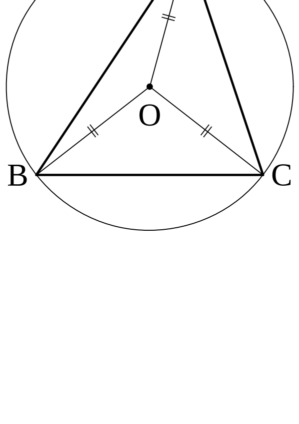
【解答】



O から AB に垂線をおろしその交点を H とする。O は外心なので H は AB の中点となる。

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{AO}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AB}} &= \left|\overrightarrow{\mathrm{AO}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right| \cos\theta \\
&= \left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right| \times \left|\overrightarrow{\mathrm{AO}}\right| \cos\theta \\
&= \left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right| \times \left|\overrightarrow{\mathrm{AH}}\right| \\
&= 1 \times \frac{1}{2} \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

ちなみち、$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ をまず求めてから解いていく解法も別解として紹介したいと思います。外心の問題は、垂直 2 等分線の交点であるという性質を使うこともありますが、外心は外接円の中心だから $\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right| = \left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right| = \left|\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right|$ という性質を使うことの方が多いです。



【別解】

$\overrightarrow{\mathrm{AO}} = x\overrightarrow{\mathrm{AB}} + y\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ とする。

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OB}} &= \overrightarrow{\mathrm{AB}} - \overrightarrow{\mathrm{AO}} \\ &= \overrightarrow{\mathrm{AB}} - (x\overrightarrow{\mathrm{AB}} + y\overrightarrow{\mathrm{AC}}) \\ &= (1-x)\overrightarrow{\mathrm{AB}} - y\overrightarrow{\mathrm{AC}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OC}} &= \overrightarrow{\mathrm{AC}} - \overrightarrow{\mathrm{AO}} \\ &= \overrightarrow{\mathrm{AC}} - (x\overrightarrow{\mathrm{AB}} + y\overrightarrow{\mathrm{AC}}) \\ &= -x\overrightarrow{\mathrm{AB}} + (1-y)\overrightarrow{\mathrm{AC}}\end{aligned}$$

ここで余弦定理より $\cos\angle\mathrm{CAB} = \dfrac{1+4-3}{2\cdot 2} = \dfrac{1}{4}$ よって

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}} = 1\cdot 2\cdot\dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{2}$ ◀ 内積が必要になるのでとりあえず求めておいた

ここで O は外心なので $\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right| = \left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right| = \left|\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right|$ ◀ 外心の重要な性質より がいえる。

$$\begin{aligned}\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|^2 &= \left|-\overrightarrow{\mathrm{AO}}\right|^2 \\ &= \left|x\overrightarrow{\mathrm{OA}} + y\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|^2 \\ &= x^2\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|^2 + 2xy\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}} + y^2\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|^2 \\ &= x^2 + xy + 4y^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|^2 &= \left|(1-x)\overrightarrow{\mathrm{AB}} - y\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right| \\ &= (x-1)^2\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|^2 - 2(1-x)y\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}} + y^2\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|^2 \\ &= (x-1)^2 - 2(1-x)y\cdot\frac{1}{2} + y^2\cdot 4 \\ &= x^2 - 2x + 1 - y + xy + 4y^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left|\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right|^2 &= \left|-x\overrightarrow{\mathrm{AB}} + (1-y)\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|^2 \\ &= x^2\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|^2 - 2x(1-y)\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}} + (y-1)\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|^2 \\ &= x^2 - 2x(1-y)\cdot\frac{1}{2} + (y-1)^2\cdot 4 \\ &= x^2 - x + xy + 4y^2 - 8y + 4\end{aligned}$$

$\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|^2 = \left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|^2$ より

$x^2 + xy + 4y^2 = x^2 - 2x + 1 - y + xy + 4y^2$

$y = 2x - 1 \cdots ①$

$\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|^2 = \left|\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right|^2$ より

$x^2 + xy + 4y^2 = x^2 - x + xy + 4y^2 - 8y + 4$

$x = -8y + 4 \cdots ②$

② を ① に代入して

$$
\begin{aligned}
y &= -2(-8y + 4) + 1 \\
y &= 16y - 8 + 1 \\
-15y &= -7 \\
y &= \frac{7}{15} \\
x &= -8 \cdot \frac{7}{15} + 4 \\
&= \frac{4}{15}
\end{aligned}
$$

$\therefore\ \overrightarrow{\mathrm{AO}} = \frac{4}{15}\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \frac{7}{15}\overrightarrow{\mathrm{AB}}$

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{AO}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AB}} &= \left(\frac{4}{15}\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \frac{7}{15}\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right) \cdot \overrightarrow{\mathrm{AB}} \\
&= \frac{4}{15}\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|^2 + \frac{7}{15}\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}} \\
&= \frac{4}{15} \cdot 1 + \frac{7}{15} \cdot \frac{1}{2} \\
&= \frac{4}{15} + \frac{7}{30} \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

このようにすれば $\overrightarrow{\mathrm{AO}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AB}}$ も求めることができます。ただ見てもらえばわかるようにかなり面倒です。内積の図形的な性質と言えばなんとなく難しそうですが、今回説明したようになんてことない内容です。難関大学志望者はしっかりと覚えておいてください。

河見賢司

目指せ偏差値４５から５５！高校数学の勉強法
http://www.hmg-gen.com/

感想はこちらまでメールをください（何か言ってもらえると嬉しいです）
magdai@hmg-gen.com