

「ルールを覚えれば誰でもできる！あなたの数学の偏差値を70にするプリント」の詳細は以下をクリック！

<https://www.hmg-gen.com/tuusin.html>

「自宅に居ながら1対1の数学の授業が受けられます」の詳細は以下をクリック！

<https://www.hmg-gen.com/tuusin1.html>

質問内容

数学Ⅱの微分積分の単元で $\frac{d}{dx} \left(\int_a^x f(t) dt \right) = f(x)$ っていう公式なんですけど、どうしてこの公式が成立するのですか？

回答

そうですね？確かに公式がどのように導かれたか分かりませんよね。でも、これって意外に簡単に導けますよ。

まず $\frac{dy}{dx}$ の意味が分かっていない人もいると思うので、一応説明しておきます。

例えば、 $y = x^2 - a^2$ を微分しろって言われたら $y' = 2x$ っていうと思うけど、これも正解だけど $y' = 2a$ これも正解。

$y' = 2x$ は x で微分したもので、 $y' = 2a$ は a で微分したものだ。 y' は微分しなさいということだから、どっちの文字で微分をしたらいいか分からないんだ。まあ、上記の式だったら普通は x で微分するとは思いますが…

そこでしっかりと区別したいときには $\frac{dy}{dx}$ と書きます。これは、 y を x で微分しなさいという記号です。

先程の例では、 $\frac{dy}{dx} = 2x$ だし、 $\frac{dy}{da} = 2a$ となります。 $\frac{d}{dx} \left(\int_a^x f(t) dt \right)$ は $\left(\int_a^x f(t) dt \right)$ を x で微分しなさいということです。数学Ⅱでは、あまり出てきませんが数学Ⅲになったら、この表記は頻出なのでよく覚えておいてください。では、本題に戻ります。

$f(t)$ を積分したら $F(t)$ になるとします。積分と微分は逆の関係にあるので $F(t)$ を微分したら $f(t)$ になるよね。

まずは $\frac{d}{dx} \left(\int_a^x f(t) dt \right)$ の、中身の $\int_a^x f(t) dt$ を計算してみます。

$$\begin{aligned} & \int_a^x f(t) dt \\ &= \left[F(t) \right]_a^x \quad \leftarrow f(t) \text{ を積分したら } F(t) \text{ となる} \\ &= F(x) - F(a) \end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dx} \left(\int_a^x f(t) dt \right) \\ &= \frac{d}{dx} (F(x) - F(a)) \quad \leftarrow \int_a^x f(t) dt = F(x) - F(a) \text{ を代入した} \\ &= F'(x) - F'(a) \end{aligned}$$

あとは $F'(x)$ と $F'(a)$ の計算をしたらいんだけど、まずは $F(x)$ から考えていきます。

$F(x)$ は $f(x)$ を積分したものです。 $F'(x)$ はそれを微分したものです。積分して微分をするんだからもとの $f(x)$ に戻るんじゃない？だから $F'(x) = f(x)$ になります。

次に $F'(a)$ なんですけど、 $F'(a)$ は定数なんだから微分すると 0 になります。定数は微分すると 0 になるよね。

このことから $F'(x) - F'(a) = f(x)$ になります。

以上より、 $\frac{d}{dx} \left(\int_a^x f(t) dt \right) = f(x)$ の簡単な証明ができました。

少し、今回の本題からはそれですが、たまに「証明もできない公式を問題を解くのに使うのはおかしい。まずは、自分で証明してから問題を解け。暗記はするな」という数学の先生がいます。

たしかに、本来の数学から考えればその方が正しいと思います。でも、多くの大学受験の問題は、単なる公式を暗記するだけで解けてしまし、数学があまり得意でない人は、公式を導けと言われたらそれだけでイヤになっちゃいますよね。

高校生のときの僕もそうでした。なんとなく公式を覚えて、意味も分からずにその公式を適用する。意味も分からず、問題をこなしていただけですけど、なんとなく公式の意味もわかってきて、それから公式の意味を考えたり、導いたりするようになりました。

本来の順番からいえば、公式を証明する、それからその公式を使って問題を解いていく、なんですけど数学が得意な人にとってはそれでいいかもしれませんが、そうでない、いわゆる普通の人は、まずは公式を覚える、暗記でも、パターン認識でもいいので、その公式を使って問題を解いて、公式自体になれる。

そして、さらに余裕があるのなら公式の意味を考えたり、証明をする。といった感じでいいと思います。

定理、公式なんですけど、それ自体が大学受験に出ることも少なくないんです。難関大学ほど、出題されやすいように感じます。例えば、1999年の東京大学では、三角関数の加法定理を証明せよという問題が出ています。 $\log_a AB = \log_a A + \log_a B$ こういった公式の証明をたまに出てくるので、難関大学を志望する人は特に、定理、公式を自分で導くという作業をしっかりとしておいてください。

繰り返しになりますけど、数学があまり得意でないという人は、公式の証明は後回しにして、まずは問題演習を繰り返した方がいいですよ。それで、できるようになってから定理、公式の証明をするようにしてください。

数学って難しいですよ。でも、数学って「このときはこうする」というルールがあってそれをひとつずつ覚えていけば誰でもできるようになります。

「今までの苦労はなんだったの？」と思えるほど、簡単にできるようになりますよ。

「4浪しているのにセンター6割」

→ 「わずか入会8か月後に島根大学医学部医学科に合格！」

本人いわく「悲惨な成績」で限りなく学年で下位
→「ぐんぐん成績をあげて筑波大学理工学群現役合格!」

「問題が少し難しくなるととたんに解けなくなる」
→「解き方のルールを覚えて難問も解けるようになり東北大学歯学部合格!」

多くの受験生が数学の成績をあげた秘訣を紹介します。

以下の無料メルマガの登録をしてください。無料ですし、いつでも解除できるので登録しないと損ですよ。以下の枠をクリックしてください。

ルールが分かれば誰でもできる！
あなたの数学の偏差値を70にするメルマガ

ラインでも配信しています。ラインの方は以下よりお願いします。

ラインで登録する！

ツイッターやっています
<https://twitter.com/hmggen>

高校数学の勉強法
<https://www.hmg-gen.com/>

医学部数学の勉強法
<https://www.ouen-math.com/>

感想はこちらまでメールをください（何か言ってもらえると嬉しいです）
magdai@hmg-gen.com

河見賢司