

質問内容

指数の問題です。 $3^x + 3^{-x} = t$  のとき、 $9^x + 9^{-x}$  を  $t$  を用いて表せっていう問題が分かりません。どうすればいいですか？

回答

この問題は、有名なんですが教科書や問題集なんかでも解答をサラッと書いてあるだけで、分かりにくいことって多いですね。実は、これ対称式の問題になおすことができます。

対称式っていうのは  $a^2 + b^2$  や  $\frac{a}{b} + \frac{b}{a}$  のように文字を入れ替えても元の式と変わらない式のことを言います。先ほどの式を  $a$  と  $b$  を入れ替えてみると  $a^2 + b^2 \Rightarrow b^2 + a^2$  となりますが、これはもとの式  $a^2 + b^2$  と等しいよね。 $\frac{a}{b} + \frac{b}{a}$  も同じように成立しています。

対称式には重要な性質があって、 $a$  と  $b$  の対称式の場合、与式は  $a + b$  と  $ab$  のみを使って表すことができます。簡単に導けますが、次の2つは公式として覚えておいてください。

覚えるべき対称式

$$\textcircled{1} \quad a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab$$

$$\textcircled{2} \quad a^3 + b^3 = (a + b)^3 - 3ab(a + b)$$

対称式について、もっとよく知りたい人はこちらのプリントで勉強してください。

対称式のプリント <http://www.hmg-gen.com/taisyouwiki.pdf>

対称式のプリント (練習問題解答) <http://www.hmg-gen.com/k-taisyouwiki.pdf>

では、今日の本題の  $3^x + 3^{-x} = t$  のとき、 $9^x + 9^{-x}$  を  $t$  で表せという問題に進みます。

この前にまず、指数の問題ではあるひとつの指数のみで表せることが多いということを覚えてください。今回の問題では、 $3^x + 3^{-x}$  は  $3^x + \frac{1}{3^x}$  って式変形できるから  $3^x$  のみで表せることができるよね。次に、 $9^x + 9^{-x}$  なんだけど  $9^x = (3^2)^x = (3^x)^2$  って式変形できるので、こちらでも  $3^x$  のみで表すことができます。

ですから、 $3^x = X$  とでも文字を置き換えて解いていくとずっと見やすくなります。

$3^x = X$  と文字を置き換えると  $9^x = X^2$  になります。今回の問題は  $3^x + 3^{-x} = t$  のとき、 $9^x + 9^{-x}$  を  $t$  を用いて表せだけど、 $3^x = t$  と置き換えることにより、問題は  $X + \frac{1}{X} = t$  の

とき、 $X^2 + \frac{1}{X^2}$  の値を求めよという問題になおすことができるんじゃない？これだったら簡単だよ。

指数の問題では、ほとんどの問題であるひとつの指数にすることが多いです。あるひとつの指数と言いましたが、 $2^x = X$ ,  $3^x = X$  と文字を置き換えることがほとんどです。このことを覚えておいてください。では、問題に戻ります。

問題

$3^x + 3^{-x} = t$  のとき、 $9^x + 9^{-x}$  を  $t$  を用いて表せ。

これは、 $3^x = t$  と置き換えることにより、次の問題と同じになります。

問題

$X + \frac{1}{X} = t$  のとき、 $X^2 + X^{-2}$  を  $t$  を用いて表せ。

ここからは後は対称式の問題です。 $X^2 + X^{-2} = X^2 + \frac{1}{X^2} = X^2 + \left(\frac{1}{X}\right)^2$  こう式変形をすると、与式は  $X$  と  $\frac{1}{X}$  の対称式になります。それでは、これらのことを踏まえて、問題を解いていきます。

【解答】

$3^x = X$  とする。 $3^x + 3^{-x} = X + \frac{1}{X} = t$  となる。

$$\begin{aligned} 9^x + 9^{-x} &= X^2 + \left(\frac{1}{X}\right)^2 \\ &= \left(X + \frac{1}{X}\right)^2 - 2X \frac{1}{X} \quad \leftarrow \text{対称式の公式 } a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab \text{ に } a = X, b = \frac{1}{X} \text{ を代入した} \\ &= t^2 - 2 \quad \leftarrow X + \frac{1}{X} = t \text{ を代入した。これが答え！} \end{aligned}$$

今回は、これで終了です。ごくごく基本的なことですが意外に理解できていなかった人も多いと思います。よく出てくる問題なのでしっかりと理解しておいてください。

河見賢司

目指せ偏差値 45 から 55 ! 高校数学の勉強法

<http://www.hmg-gen.com/>

感想はこちらまでメールをください (何か言ってもらえると嬉しいです)

[magdai@hmg-gen.com](mailto:magdai@hmg-gen.com)