

「ルールを覚えれば誰でもできる！あなたの数学の偏差値を70にするプリント」の詳細は以下をクリック！

<https://www.hmg-gen.com/tuusin.html>

「自宅に居ながら1対1の数学の授業が受けられます」の詳細は以下をクリック！

<https://www.hmg-gen.com/tuusin1.html>

質問内容

普段勉強している問題集で、

$$\frac{x^2 + x + 1}{\sqrt{x+1}\sqrt{x^2+x+1}} = \frac{\sqrt{x^2+x+1}}{\sqrt{x+1}}$$

って解答には書かれているんですけど、この式変形の仕方が分かりません。どのように式変形をしているのですか？

ややこしい式で、少し気づきにくいですよ。これって $\frac{A}{\sqrt{A}} = \sqrt{A}$ という式変形を使っているだけなんです。

分母がルートなので有理化をしても求めることができますが、これは $A = \sqrt{A} \sqrt{A}$ と考えたほうが楽だと思いますよ。

$$\begin{aligned} \frac{A}{\sqrt{A}} &= \frac{\sqrt{A} \sqrt{A}}{\sqrt{A}} \quad \leftarrow A = \sqrt{A} \sqrt{A} \text{ より} \\ &= \sqrt{A} \end{aligned}$$

* $A = \sqrt{A} \cdot \sqrt{A}$ と変形できるのは、 $A \geq 0$ のときで、 A が負のときはできませんよ。ただ、今回の場合、分母に \sqrt{A} があります。この時点で $A > 0$ が言えているので、 $A = \sqrt{A} \cdot \sqrt{A}$ と変形できます。

それでは、これを使って式変形を試みますね。

$$\begin{aligned} & \frac{x^2 + x + 1}{\sqrt{x+1} \sqrt{x^2 + x + 1}} \\ &= \frac{\sqrt{x^2 + x + 1} \sqrt{x^2 + x + 1}}{\sqrt{x+1} \sqrt{x^2 + x + 1}} \quad \leftarrow x^2 + x + 1 = \sqrt{x^2 + x + 1} \sqrt{x^2 + x + 1} \text{ より} \\ &= \frac{\sqrt{x^2 + x + 1}}{\sqrt{x+1}} \end{aligned}$$

せっかくですから、この問題全て解いてみますね。次数下げ、相加相乗平均を使います。大学受験にはよく出題されますが、高校生は苦手としている(というか高校ではあまり勉強しないので、解き方を知らない)人が多いと思います。

そう考えたら、この問題はいい問題ですね。

問題

$x > -1$ のとき、 $\frac{x^2 + x + 1}{\sqrt{x+1} \sqrt{x^2 + x + 1}}$ の最小値を求めよ。

【解説】

まずは、先ほど解説した式変形をします。

$$\frac{x^2 + x + 1}{\sqrt{x+1} \sqrt{x^2 + x + 1}} = \frac{\sqrt{x^2 + x + 1}}{\sqrt{x+1}}$$

ここからは、分母分子にルートが付いているのでひとつにまとめます。

$$\frac{\sqrt{x^2 + x + 1}}{\sqrt{x+1}} = \sqrt{\frac{x^2 + x + 1}{x+1}}$$

で、ここから $\sqrt{\frac{x^2 + x + 1}{x+1}}$ の最小値を求めます。

ルートの中身の $\frac{x^2 + x + 1}{x+1}$ が最小となるとき、 $\sqrt{\frac{x^2 + x + 1}{x+1}}$ も最小となるので、以下 $\frac{x^2 + x + 1}{x+1}$ の最小値を求めていきます。

で、ここからなんですけど $\frac{x^2+x+1}{x+1}$ を見た瞬間に次のことを思い出さないといけません。

分数関数の次数下げ

分数関数で、分子の次数の方が分母の次数より大きい、または同じ場合、分子の次数の方が分母の次数より小さくなるまで次数下げをしないとイケない！

今回の問題では、分子が x^2+x+1 で2次式、分母が $x+1$ で1次式。分子の次数の方が大きいので次数下げをします。次数下げの方法は、分母で分子を割っていきます。

$$\begin{array}{r} x \\ x+1 \overline{) x^2+x+1} \\ \underline{x^2+x} \\ 1 \end{array}$$

$$\frac{x^2+x+1}{x+1} = \frac{x(x+1)+1}{x+1} = x + \frac{1}{x+1} \quad \leftarrow \text{次数下げができた}$$

で、ここから考えていくんですけど、関数の最大値、最小値問題の基本はグラフをかいて求めていくんですけど、分数関数のグラフを書くには数学 III の知識が必要なので、グラフをかく以外に解き方があるはずですよ。

分数関数の最大値、最小値問題には何通りかの解き方がありますが、出題頻度が高いのは相加相乗平均で解く方法です。今回も、相加相乗平均を使って最小値を求めていきます。

相加相乗平均使うには、 $a + \frac{1}{a} \geq 2\sqrt{a \cdot \frac{1}{a}}$ のように和の形で表されている2つの変数が、かけ合わせることによって互いに打ち消し合うときに使うことが多いです。

今回の問題は、 $x + \frac{1}{x+1}$ なので2つをかけ合わせても $x \frac{1}{x+1}$ としても変数は消えてくれません。でも、 $x = (x+1) - 1$ って式変形をすると互いに打ち消し合ってくれる形になるんじゃない？このように、相加相乗平均が一見見えそうにない問題でも少し工夫するだけで、相加相乗平均を使える形に変化することができます。

ある程度慣れも必要ですが、分数関数の最大値、最小値問題では相加相乗平均を使えるのではないかな？と考えるようにしておいてください。それでは、解答に進みます。

【解答】

$$\begin{aligned} & \frac{x^2 + x + 1}{\sqrt{x+1} \sqrt{x^2 + x + 1}} \\ &= \frac{\sqrt{x^2 + x + 1}}{\sqrt{x+1}} \\ &= \sqrt{\frac{x^2 + x + 1}{x+1}} \end{aligned}$$

$\frac{x^2 + x + 1}{x+1}$ が最小になるとき、 $\sqrt{\frac{x^2 + x + 1}{x+1}}$ も最小になるので、以下 $\frac{x^2 + x + 1}{x+1}$ の最小値を求める。

$$\begin{aligned} & \frac{x^2 + x + 1}{x+1} \\ &= x + \frac{1}{x+1} \\ &= x + 1 + \frac{1}{x+1} - 1 \quad \blacktriangleleft \text{相加相乗平均をえる形にするため1を足して1を引いた} \end{aligned}$$

ここで、 $x > -1$ より、 $x+1 > 0$ なので相加相乗平均を使うと

$$\begin{aligned} x + 1 + \frac{1}{x+1} - 1 &\geq 2 \sqrt{(x+1) \frac{1}{x+1}} - 1 \\ &= 2 - 1 \\ &= 1 \end{aligned}$$

等号が成立するのは $x+1 = \frac{1}{x+1}$ のとき、つまり $x=0$ のときに成立。

よって、 $\frac{x^2 + x + 1}{x+1}$ は $x=0$ のとき、最小値 1 をとる。

以上より、 $x > -1$ における $\frac{x^2 + x + 1}{\sqrt{x+1} \sqrt{x^2 + x + 1}}$ は $x=0$ のとき、最小値 $\sqrt{1} = 1$ をとる。

今回は、これで終了です。分数関数の最大値、最小値問題は相加相乗平均を使って解くことが多いです。相加相乗平均を使って解く最大値、最小値はこれまで何度か説明してきましたが、本当に重要です。しっかりと理解しておいてください。

数学って難しいですね。でも、数学って「このときはこうする」というルールがあつてそれをひとつずつ覚えていけば誰でもできるようになります。

「今までの苦労はなんだったの？」と思えるほど、簡単にできるようになりますよ。

「4浪しているのにセンター6割」

→ 「わずか入会8か月後に島根大学医学部医学科に合格！」

本人いわく「悲惨な成績」で限りなく学年で下位

→ 「ぐんぐん成績をあげて筑波大学理工学群現役合格！」

「問題が少し難しくなるととたんに解けなくなる」

→ 「解き方のルールを覚えて難問も解けるようになり東北大学歯学部合格！」

多くの受験生が数学の成績をあげた秘訣を紹介します。

以下の無料メルマガの登録をしてください。無料ですし、いつでも解除できるので登録しないと損ですよ。以下の枠をクリックしてください。

**ルールを覚えれば誰でもできる！
あなたの数学の偏差値を70にするメルマガ**

ラインでも配信しています。ラインの方は以下よりお願いします。

ラインで登録する！

ツイッターやっています
<https://twitter.com/hmggen>

高校数学の勉強法
<https://www.hmg-gen.com/>

医学部数学の勉強法
<https://www.ouen-math.com/>

感想はこちらまでメールをください（何か言ってもらえると嬉しいです）
magdai@hmg-gen.com

河見賢司