

高校3年生 K さんからの質問です。

質問内容

不定積分の $\int \frac{dx}{x^2 - 4}$ の計算の仕方がまったく分かりません。どうやって解けばいいですか？

こんにちは、河見賢司です。確かに定積分っていろいろとあって難しいですよ。定積分は問題の形によって解き方が決まっているので、それをひとつずつ覚えていってください。「なんでそうなるの？」と聞かれても、こうするとうまくいくから、そう覚えたとしか説明しようがありません。

$$\int \frac{dx}{x^2 - 4}$$

今回のインテグラルの中身は $\frac{1}{x^2 - 4}$ だね。こういったときには部分分数分解できます。部分分数分解ができるには何種類かのパターンがありますが、基本的に**分母が因数分解できるときは、部分分数分解できる**と思ってもらって構いません。今回の分母は $x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2)$ と分母が因数分解できる形になっているので部分分数分解できます。

部分分数分解については次のことを覚えてください。

部分分数分解

$$\frac{1}{(x + a)(x + b)} = \frac{1}{b - a} \left\{ \frac{1}{x + a} - \frac{1}{x + b} \right\} \text{ と部分分数分解できる。}$$

証明は簡単にできますよ。

証明

$$\begin{aligned} \text{(右辺)} &= \frac{1}{b - a} \left\{ \frac{1}{x + a} - \frac{1}{x + b} \right\} \\ &= \frac{1}{b - a} \left\{ \frac{x + b}{(x + a)(x + b)} - \frac{x + a}{(x + a)(x + b)} \right\} \quad \leftarrow \text{通分をした} \\ &= \frac{1}{b - a} \frac{(x + b) - (x + a)}{(x + a)(x + b)} \\ &= \frac{1}{b - a} \frac{b - a}{(x + a)(x + b)} \\ &= \frac{1}{(x + a)(x + b)} = \text{(左辺)} // \end{aligned}$$

↑ 上記の部分分数分解なんですけど、公式そのものを覚えるより、その場で上記の証明

のように部分分数分解をして確かに成立しているなど確認しながらそのばで導いていったほうがいいと思います。

では、問題の $\int \frac{dx}{x^2-4}$ に戻ります。これは部分積分をしたあと、以下の積分の公式を使って解いていきます。

積分の公式

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} = \log |f(x)| + c \quad (c \text{ は積分定数})$$

では、 $\int \frac{dx}{x^2-4}$ の解答に進みます。

【解答】

$$\begin{aligned} & \int \frac{dx}{x^2-4} \\ &= \int \frac{1}{(x+2)(x-2)} dx \quad \blacktriangleleft \text{分母を因数分解した} \\ &= \int \frac{1}{(x+2)-(x-2)} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+2} \right) dx \quad \blacktriangleleft \text{部分分数分解をした} \\ &= \int \frac{1}{4} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+2} \right) dx \\ &= \frac{1}{4} \int \left(\frac{(x-2)'}{x-2} - \frac{(x+2)'}{x+2} \right) dx \\ &= \frac{1}{4} (\log |x-2| - \log |x+2|) + C \\ &= \frac{1}{4} \log \left| \frac{x-2}{x+2} \right| + C \quad (\text{ただし } C \text{ は積分定数}) \quad \blacktriangleleft \log A - \log B = \log \frac{A}{B} \text{ より。これが答え！} \end{aligned}$$

積分はそれぞれで解き方が決まっています。ちなみに

$$\begin{aligned} & \int \frac{1}{x^2+a^2} dx \text{ のときは } x = a \tan \theta \text{ と置換積分} \\ & \int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}} dx \text{ のときは } x = a \sin \theta (\text{または } x = a \cos \theta) \text{ と置関積分していきます。} \end{aligned}$$

にているのでしっかりと区別しておいてください。

河見賢司

目指せ偏差値45から55！高校数学の勉強法

<http://www.hmg-gen.com/>

感想はこちらまでメールをください（何か言ってもらえると嬉しいです）

magdai@hmg-gen.com